

Циклические ускорители заряженных частиц

Г. БРУК



ACCÉLÉRATEURS CIRCULAIRES DE PARTICULES

Introduction à la théorie

PAR

Henri Bruck

Professeur à l'Institut National
des Sciences et Techniques Nucléaires

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
ET TECHNIQUES NUCLÉAIRES
SACLAY

PRESSES UNIVERSITAIRES
DE FRANCE

1966

Г. БРУК

Циклические ускорители заряженных частиц

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ

Перевод с французского
В. Ф. Алешина, В. В. Жукова, В. А. Уварова

Под редакцией
А. И. ДЗЕРГАЧА

АТОМИЗДАТ МОСКВА 1970

Циклические ускорители заряженных частиц. Введение в теорию. Б р у к Г. Пер. с франц. Атомиздат, 1970.

В книге подробно излагается методика расчета синхротрона с сильной фокусировкой. Приведены многочисленные примеры и характеристики действующих и проектируемых ускорителей. Дается также систематизированное изложение некоторых проблем ускорительной техники, связанных с пучками большой интенсивности и встречными пучками.

Особенностью книги является подробный вывод формул и лаконичность текста, краткое, но вместе с тем доступное изложение сложных вопросов.

Книга полезна лицам, изучающим теорию и технику циклических ускорителей и накопителей, а также участвующим в их разработке.

Предисловие автора к русскому изданию

Автору приятно, что его книга изда на в стране высоких научных традиций

На зарубежных гостей, посещающих СССР, производят огромное впечатление имеющиеся в вашей стране ускорители заряженных частиц и высококвалифицированные специалисты, работающие в этой области. Велик вклад СССР и в теорию ускорителей. Здесь выдвинуты основные принципы построения ускорителей, используемые в синхротронах, микротронах, а также в ускорителях с самофокусирующимся релятивистским пучком и коллективных линейных ускорителях ионов. Последние два принципа, сформулированные более 13 лет назад, лежат в основе на иболее перспективных исследований в области ускорителей. Автор видит в них типичные примеры глубины воображения и смелости русской научной мысли.

Советскому Союзу принадлежит ныне (1969 г.) самый мощный в мире ускоритель. В СССР скоро будет построена уникальная установка со встречными пучками протонов и антипротонов, основанная на остроумном принципе «охлаждения» пучка протонов* электронами.

Русская книга по теории ускорителей А. А. Коломенского и А. Н. Лебедева, переведенная на английский язык, является основным пособием специалистов во всем мире.

Автор настоящей книги пр изнателен группе сотрудников Радиотехнического института АН СССР за инициативу по ее переводу на русский язык. Эта книга — результат работы автора, являющегося специалистом по ускорителям и преподавателем в этой области; часть текста представляет собой элементарное введение

* Г. Брук имеет в виду известное предложение академика Г. И. Будкера об охлаждении электронами пучка антипротонов. — *Прим. ред.*

для начинающих, другие главы могут дать специалистам дополнительную информацию по некоторым проблемам.

Сознавая пользу международного научного сотрудничества, автор выражает свою глубокую симпатию всем коллегам — физикам, инженерам-специалистам, которые прочтут эту книгу.

Автор пользуется случаем выразить также и в русском издании этой книги свою глубокую благодарность за постоянную поддержку Г. Байсасу, А. Блан-Лапьеру, Ж. Дебьесу.

Г. Брук

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию русского читателя книга написана одним из наиболее известных и опытных французских специалистов по циклическим ускорителям заряженных частиц.

Быстрое развитие экспериментальной физики и, в частности, ускорительной техники приводит к тому, что книги, написанные даже менее 10 лет назад, уже не удовлетворяют в достаточной мере ни лиц, впервые приступающих к изучению этой отрасли, ни специалистов, нуждающихся в систематизации знаний и обзоре основных проблем. С этой точки зрения появление книги Г. Брука представляется весьма своевременным.

Книга состоит из краткого введения, где описаны принципы действия основных типов ускорителей, и шести частей. Уже во введении проявилась тенденция автора охватить в книге самые последние достижения ускорительной техники: среди основных типов ускорителей описаны накопительные кольца, рассматриваемые подробно в конце книги.

Автор уделяет мало внимания таким типам ускорителей, как циклотрон (обычный и с азимутальной вариацией поля), фазотрон, бетатрон и микротрон, — о них говорится лишь во введении. В книге детально описаны методы расчета синхрофазотрона с сильной фокусировкой (протонный синхротрон). Особенностью изложения является удачная, на наш взгляд, методика рассмотрения свойств секторного магнитного поля, которая позволяет использовать результаты непосредственно для слабо- и сильнофокусирующих машин. Весьма ценны для инженеров-практиков вторая и третья части, где приведен большой расчетно-справочный материал. Очень полезным представляется изложение теории сильной фокусировки с примерами различных структур, в том числе длинных согласованных промежуток, теории согласования пучков и метода усреднения.

Малое внимание к нелинейным эффектам магнитного поля связано, очевидно, с мнением автора о неактуальности этих вопросов в существующих ускорителях. Несомненно, на отборе материала и характере изложения сказался личный опыт автора по разработке и сооружению ускорителей.

В последних двух частях книги автор систематизирует некоторые современные проблемы теории и техники ускорителей, опираясь на малодоступные широкому кругу читателей работы по теории накопительных колец и возникающим в них своеобразным новым эффектам, а также излагает теорию релятивистских стабилизированных пучков, предложенных академиком Г. И. Будкером для достижения в ускорителях сверхсильных магнитных полей. Это первая попытка систематизации, и она может вызвать некоторые нарекания со стороны специалистов, тем более, что за время, прошедшее после написания книги (1964 г.), получены новые результаты (ссылки на некоторые из них добавлены при редактировании перевода). Мы согласны, однако, с мнением автора книги, что даже неполное изложение новых проблем и теорий полезно.

Книга Г. Брука имеет ряд особенностей: в ней много формул, причем их вывод приведен, как правило, полностью. Это позволило автору изложить сложные вопросы на высоком научном уровне и вместе с тем доступном читателю. Пояснительный текст весьма лаконичен, почти конспективен.

Книга насыщена примерами, иллюстрирующими расчетные соотношения для реальных ускорителей (в основном французского синхрофазотрона «Сатурн» с энергией 3 млрд. эв), что придает изложению живость и углубляет понимание материала. Приводятся также некоторые интересные и полезные аналогии из других областей физики (астрономия, физика сплошных сред).

При переводе были добавлены ссылки на литературу, освещающую современное состояние вопроса. Кроме того, учтены поправки, сделанные автором для русского издания, и опущена часть Приложения (уравнения Максвелла, некоторые физические константы и формулы векторного анализа). Более полную информацию, особенно по пучкам большой интенсивности и встречным пучкам, можно найти в трудах последних конференций по ускорителям. Это Всесоюзное совещание по ускорителям заряженных частиц (9—18 октября 1968 г., Москва), Международная конференция по ускорителям (1967 г., США, Кембридж, на английском языке), 1-я, 2-я и 3-я Национальные конференции США по ускорителям (1965, 1967 и 1969 гг., см. журнал *Trans of the IEEE*).

Перевод книги выполнен В. В. Жуковым (Введение, гл. 1—9, 23—26), В. Ф. Алешиным (гл. 10—14, 20—22) и канд. техн. наук В. А. Уваровым (гл. 15—19, 27—32).

А. И. Дзергац

Введение

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ

Бетатрон

Магнит и вакуумная камера бетатрона (рис. 1) обладают симметрией вращения. В центральном зазоре между полюсами магнит создается ускоряющее однородное поле B_a , а в области расположения вакуумной камеры — ведущее поле B_g . Для обеспечения фокусировки частиц это поле делается слегка неоднородным. Оба поля изменяются по циклическому закону вида

$$B = \frac{\hat{B}}{2} (1 - \cos \omega t) = \hat{B} \sin^2 \omega t / 2 \quad (1)$$

и представляют собой суперпозицию гармонического поля с постоянным, благодаря которому суммарное поле не меняет направления.

На практике используется частота циклов ускорения

$$\nu = \omega / 2\pi = 20 \div 100 \text{ гц.}$$

Благодаря изменению магнитного потока $\Phi_a = \pi r^2 B_a$, сцепленного с контуром орбит частиц в вакуумной камере, возникает электрическое азимутальное поле E , ускоряющее частицы. Интеграл по замкнутому контуру вдоль оси камеры

$$\oint \mathbf{E} \, ds = 2\pi r E = \dot{\Phi}_a = \pi r^2 \dot{B}_a; \quad (2)$$

$$E = \frac{B_a \dot{r}}{2}.$$

Это электрическое поле действует на азимутальную компоненту p импульса заряженной частицы по закону

$$\dot{p} = \frac{d}{dt} p = eE = \frac{1}{2} e \dot{B}_a r.$$

Полагая для $B_a = 0$ $p = 0$, после интегрирования получим

$$p = \frac{1}{2} e B_a r. \quad (3)$$

Ведущее поле должно удерживать ускоряемые частицы на круговой траектории по оси вакуумной камеры. Это будет при условии [см. формулу (8)]

$$\rho = eB_g \rho. \quad (4)$$

Исключая ρ из уравнений (3) и (4), можно получить известное бетатронное условие «2:1», найденное Видерое в 1928 г.:

$$B_g = 1/2 B_a. \quad (5)$$

Этого условия достаточно, чтобы, увеличивая значение полей, получить ускорение частиц с любыми массами и зарядами. Обычно в на-

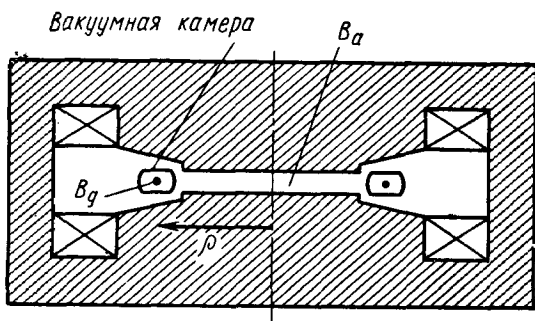


Рис. 1.

чале каждого цикла производится инжекция пучка заряженных частиц, однако заряженные частицы могут быть созданы и путем ионизации остаточного газа в камере ускоряющим полем (плазменный бетатрон).

Бетатрон применяется обычно как ускоритель электронов. Для ускорения ионов используется циклотрон, который благодаря почти непрерывному выводу пучка обладает высокой интенсивностью. В бетатроне могут быть получены электроны с энергией приблизительно до 300 Мэв. Этот предел обусловлен энергетическими потерями из-за «синхротронного», или тормозного излучения электронов, которое нарушает механизм ускорения в бетатроне.

Принцип работы бетатрона был указан Слепяном в 1928 г. В 1940 г. Керст первым успешно осуществил ускорение электронов в бетатроне до энергии 2,3 Мэв. Его успех был связан с использованием слегка неоднородного ведущего поля в соответствии с работой Керста] и Сербера, посвященной изучению устойчивости траекторий.

В качестве примера приведем характеристики бетатрона Чикагского университета на энергию 315 Мэв (Керст, 1949 г.):

Радиус орбиты	1,22 м
Величина максимального поля	9,2 кгс
Вес магнита	275 т
Энергия инжекции	80 ÷ 135 кэв
Ток инжекции	1 ÷ 3 а
Частота циклов ускорения	6 гц

Циклотрон

Классический циклотрон. Для циклотронов характерно постоянство частоты обращения частиц независимо от их возрастающей энергии. Циклотроны используют для ускорения протонов и тяжелых ионов. Благодаря постоянству частоты обращения циклотроны работают в непрерывном режиме. Это обеспечивает высокую интенсивность пучка в циклотронах по сравнению с ускорителями, в которых выпуск и вывод частиц осуществляется только в течение коротких интервалов времени (фазотрон).

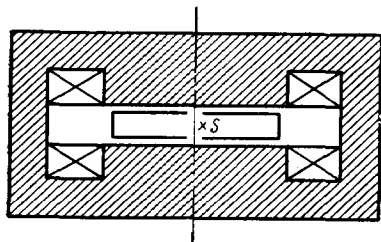


Рис. 2.

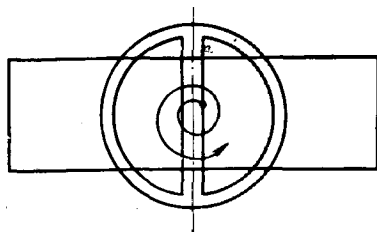


Рис. 3.

Основным элементом циклотрона является электромагнит, создающий поле (рис. 2). Классический циклотрон характеризуется почти однородным полем в зазоре

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \text{const.} \quad (6)$$

Помещенная в зазоре вакуумная камера состоит из двух половин, похожих на букву *D* и потому названных дуантами (рис. 3). Между дуантами приложено ускоряющее высокочастотное напряжение. Вблизи центра камеры расположен ионный источник *S*.

В однородном магнитном поле под действием центростремительной силы частица движется с постоянной энергией по окружности, расположенной в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Поле удовлетворяет условию

$$evB = \frac{mv^2}{\rho}, \quad (7)$$

из которого следуют важные соотношения для произведения поля *B* на радиус кривизны ρ траектории

$$B\rho = \frac{mv}{e} = \frac{p}{e} \quad (8)$$

и для угловой частоты обращения (ларморовской частоты)

$$\omega = \frac{v}{\rho} = \frac{e}{m} B. \quad (9)$$

В циклотроне можно ускорить частицы лишь до нерелятивистских энергий, для которых

$$\frac{m}{m_0} \approx 1 = \text{const.} \quad (10)$$

Таким образом, в этой области энергий

$$\omega \approx \text{const.} \quad (11)$$

Пусть между дуантами приложено ускоряющее ВЧ-напряжение

$$U = \hat{U} \sin \omega_{\text{ВЧ}} t, \quad (12)$$

где $\omega_{\text{ВЧ}} = n\omega$; $n = 1, 3, 5, \dots$ — номер ВЧ-гармоники (обычно $n=1$). Пусть в момент t частица проходит ускоряющий промежуток*. Величина $\varphi(t) = \omega_{\text{ВЧ}} t$ называется *ВЧ-фазой* частицы. Поскольку вращение частицы находится в резонансе с частотой ускоряющего поля, фаза

$$\varphi = \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (13)$$

Частицы, для которых $\varphi = \text{const}$ и $\sin \varphi > 0$, ускоряются. Между двумя последовательными прохождениями ускоряющего промежутка частицы описывают дугу окружности. Полная траектория состоит из ряда дуг, радиус которых увеличивается, и напоминает спираль.

Энергия, до которой можно ускорить частицы в циклотроне с постоянной частотой, ограничена вследствие релятивистского возрастания массы, нарушающего синхронизм обращения частиц и ВЧ-поля [см. формулу (9)]. В качестве примера укажем здесь циклотрон в Ок-Ридже, который имеет следующие характеристики:

Максимальная кинетическая энергия	22 Мэв
Возрастание массы	2,35%
Число оборотов	50
Прирост энергии за оборот	440 кэв
Диаметр полюсов магнита	218 см

Интенсивность ускоренного пучка циклотрона достигает нескольких миллиампер. Предельное ее значение определяется в основном влиянием пространственного заряда вблизи ионного источника. Разброс частиц по энергии составляет несколько процентов. Первый циклотрон с постоянной частотой был построен Лоуренсом в 1929 г. в Беркли.

Циклотрон с азимутальной вариацией поля. Для каждого циклотрона имеется однозначное соответствие между полной массой частицы m (или ее энергией) и средним радиусом ее траектории r

$$r(E) = \frac{c}{\omega} \sqrt{1 - (E_0/E)^2}, \quad (14)$$

которое можно вывести из формул (8) и (9).

* Отсчитывается от начала периода ВЧ. — Прим. ред.

Для энергии, при которой релятивистская масса заметно отличается от массы покоя, можно было бы, в принципе, сохранить частоту обращения постоянной путем увеличения поля B пропорционально массе m (или энергии E) частицы.

Однако в поле, обладающем симметрией вращения, из-за радиального возрастания интенсивности поля появляется радиальная компонента поля B_r , которая делает траекторию аксиально неустойчивой (рис. 4).

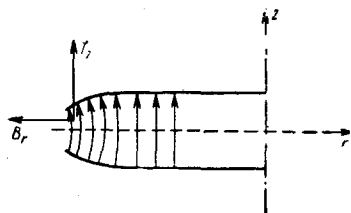


Рис. 4.

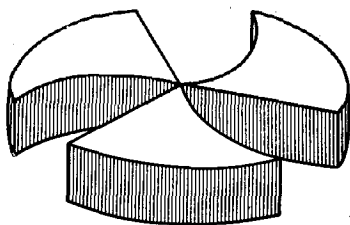


Рис. 5.

Постоянство частоты и устойчивость траектории можно обеспечить, используя поле с азимутальной вариацией, создаваемое магнитом со спиральными секторами (рис. 5). Изохронизм в таком ускорителе достигается изменением среднего поля B_r на расстоянии r от центра по закону

$$\bar{B}(r) \approx \frac{B(0)}{\sqrt{1 - (\omega r/c)^2}}. \quad (15)$$

Эта приближенная формула получается путем замены в выражении для частоты (9) среднего поля B вдоль замкнутой траектории на среднее поле $\bar{B}(r)$ вдоль окружности, радиус которой равен среднему радиусу траектории:

$$\text{const} = \omega = \frac{e}{m_0} B(0) = \frac{e}{m} \bar{B}_T \approx \frac{e}{m} \bar{B}(r).$$

Изохронизм будет наблюдаться, если

$$\bar{B}(r) \sim m(r) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2(r)}},$$

т. е. соответственно

$$\bar{B}(r) = \frac{B(0)}{\sqrt{1 - \beta^2(r)}}. \quad (16)$$

Подставляя выражение $\beta(r)$, найденное из соотношения

$$\frac{\beta c}{r} = \omega, \quad (17)$$

получим формулу (15).

Идеи о возможности создания спирального циклотрона к 1955 г. были развиты независимо Керстом, Ласлетом, Симоном в MURA*, А. А. Коломенским, В. А. Петуховым и М. С. Рабиновичем в СССР.

Циклотрон с разделенными орбитами. В 1964 г. существовал лишь набросок проекта циклотрона с разделенными орбитами. Этот проект позволял надеяться, что осуществление его будет большим шагом вперед в ускорительной технике, поскольку он допускал для широкой области энергий очень высокие интенсивности. Например, канадский проект циклотрона с разделенными орбитами рассчитан на энергию 1 Гэв и среднюю интенсивность 65 ма.

В циклотроне с разделенными орбитами каждый виток орбиты расположен в поле своего магнита. Для обеспечения фокусировки пучка магниты создают поле с переменным градиентом. Первый и последний витки орбиты располагаются в пространстве, в котором поле отсутствует, подобно тому как это имеет место в линейных ускорителях. Это дает возможность инжектировать в циклотрон частицы высокой энергии и выводить ускоренный пучок без потерь частиц. Именно эти факторы и обеспечивают возможность получения высокой интенсивности.

Частицы ускоряются в резонаторах, расположенных по азимуту так, что через каждый резонатор проходят все витки. Отличие ускорителя с разделенными орбитами от линейного ускорителя состоит в многократном прохождении каждого резонатора одной и той же частицей. Это обеспечивает лучшее использование резонаторов, что выражается в экономии ВЧ-мощности по сравнению с линейным ускорителем и в возможности непрерывной работы резонаторов. Так удается сочетать характерные для линейных ускорителей высокую мгновенную интенсивность пучка и простоту вывода ускоренных частиц с характерной для циклотронов непрерывностью работы.

К другим преимуществам ускорителя этого типа относятся отсутствие верхнего предела для энергии, фазовая устойчивость, хорошая фокусировка пучка и отсутствие неустойчивостей, связанных с резонансами бетатронных колебаний.

Первое сообщение о циклотроне с разделенными орбитами было сделано Расселом в 1953 г. (Англия, Резерфордская лаборатория)**.

Фазотрон***

Фазотрон имеет азимутально однородное магнитное поле, но частота его ВЧ-генератора модулируется таким образом, что некоторые частицы остаются в резонансе с электрическим ВЧ-полем и

* MURA (Midwestern Universities Research Association) — Объединение университетов Среднего Запада США. — *Прим. ред.*

** См. также International conference on isochronous cyclotrons, Gatlinburg, Tennessee, May 2—5 1966; IEEE Transactions, August 1966, v. 5—13, No. 4. — *Прим. ред.*

*** Используются также названия — синхроциклотрон и частотно-модулированный циклотрон. — *Прим. ред.*

ускоряются вплоть до релятивистских энергий, соответствующих максимальному радиусу при данном магнитном поле. Эффективность такого ускорения связана с принципом автофазировки, который будет рассмотрен в параграфе, посвященном синхротрону. Поскольку фазотрон работает в импульсном режиме, его средняя интенсивность составляет лишь несколько микроампер. Этот недостаток вместе с высокой стоимостью магнита фазотрона сделали эту машину устаревшей по сравнению с современными более совершенными типами ускорителей, такими, как циклотрон с азимутальной вариацией и циклотрон с разделенными орбитами.

Для иллюстрации приведем характеристики двух фазотронов:

	ЦЕРН	ОРСЕ
Диаметр полюсов магнита, <i>м</i>	5	2,40
Вес магнита, <i>т</i>	2500	650
Мощность, потребляемая магнитом, <i>квт</i>	680	400
Напряженность поля, <i>кгс</i>	18,9	16,3
Амплитуда ВЧ-напряжения, <i>кв</i>	24	25
Диапазон изменения частоты, <i>Мгц</i>	28,75 ÷ 16,4	25 ÷ 20,2
Частота циклов ускорения, <i>гц</i>	50	450
Средняя интенсивность (внутреннего пучка), <i>мкА</i>	≈ 1	≈ 3
Тип ускоряемых частиц	протоны протоны (<i>d, α</i>)	
Энергия, <i>Мэв</i>	600	157
Год пуска ускорителя	1957	1958

Микротрон

На рис. 6 приведена схема микротрона. Внутри круга, изображающего вакуумную камеру, расположен ускоряющий резонатор и источник электронов *S*. С помощью клистрона или магнетрона (что предпочтительнее вследствие его высокой мощности) внутри ускоряющего резонатора возбуждается поле на резонансной частоте $\omega_{ВЧ}$. Вакуумная камера целиком находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка.

Угловая (ларморовская) частота вращения частицы в камере $\omega = \frac{e}{m}B$. Увеличение энергии частицы $E = mc^2$ вызывает уменьшение ω . Пусть, в частности, происходит увеличение энергии частицы при каждом прохождении промежутка на постоянную величину, соответствующую массе покоя $\Delta E = (\Delta m)c^2 = m_0c^2 = 511$ кэв. Подбирая тогда соответственно величину магнитного поля, для частоты обращения частицы на следующих друг за другом оборотах получим

$$\omega_0 = \frac{e}{m_0} B = \omega_{ВЧ}; \quad \omega_1 = \frac{e}{2m_0} B = \frac{1}{2} \omega_{ВЧ};$$

$$\omega_n = \frac{e}{nm_0} B = \frac{1}{n} \omega_{ВЧ}.$$

Таким образом, несмотря на изменение частоты обращения ω , после каждого оборота, частица находится в резонансе с ускоряющим полем на все возрастающих гармониках $\omega_{вч}$. Вывод ускоренных электронов осуществляется через канал, экранирующий магнитное поле.

Реально достижимые энергии на микротроне ограничены, в основном, погрешностями магнитного поля. Уже при энергии выше 40 Мэв трудно обеспечить прохождение траектории через отверстие в ускоряющем промежутке. Максимальная интенсивность определяется мощностью ВЧ-генератора.

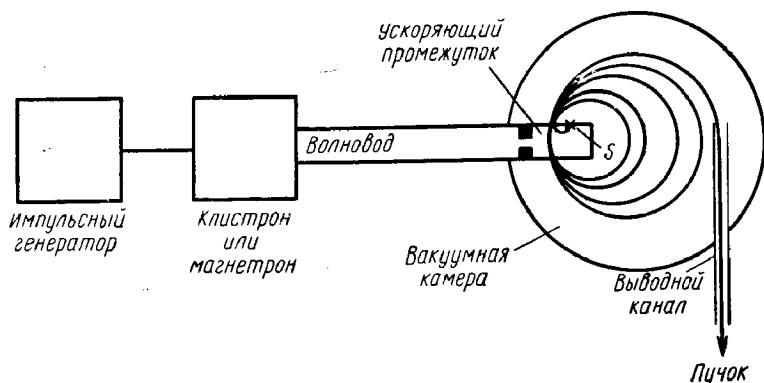


Рис. 6.

Микротрон удобен благодаря своей невысокой стоимости. Принцип его работы был предложен В. И. Векслером в 1945 г.

Приведем для иллюстрации характеристики микротрона ФИАН СССР на энергию 6,5 Мэв.

Ток в импульсе	$\hat{I} = 0,1 \text{ а}$
Пиковая мощность пучка	$\hat{P} = E \hat{I} = 650 \text{ квт}$
Амплитуда ускоряющего напряжения	$\hat{U}_{вч} = 580 \text{ кв}$
Частота ускоряющего поля	$\nu_{вч} = 3000 \text{ Мгц}$
Напряженность магнитного поля	$B = 1200 \text{ гс}$
Диаметр полюсов магнита	$2r_{\text{п}} = 700 \text{ мм}$
Продолжительность импульса	$\tau = 2 \text{ мксек}$
Частота циклов ускорения	$f_{ц} = 500 \text{ гц}$
Доля полезного времени (скважность)	$\Delta = \tau f_{ц} = 10^{-3}$
Средний ток	$\bar{I} = I \Delta = 10^{-4} \text{ а}$
Средняя мощность пучка	$\bar{P} = P \Delta = 650 \text{ вт}$

Представляет интерес также проект позитронного микротрона (см. доклад С. П. Капицы [IX]) со следующими характеристика-

ми: $E = 40$ Мэв, $\hat{I} = 10$ а (электронный ток), $\tau = 2$ мксек, $\hat{P} = 400$ Мвт.

В результате небольшого возмущения траектории пучок электронов, ускоренных до энергии около 40 Мэв, вместо того чтобы попасть в отверстие ускоряющего промежутка при следующем обороте, попадает на стенку резонатора и вызывает рождение позитронов. Позитроны в свою очередь ускоряются, двигаясь в направлении, противоположном электронам. Таким образом, одновременно получается позитронный пучок с энергией 40 Мэв. Каждый импульс содержит 10^{14} электронов. Вероятность рождения позитронов при энергии 40 Мэв приблизительно равна 10^{-6} , что дает 10^8 позитронов в одном импульсе.

Синхротрон

В синхротроне частица движется по орбите, средний радиус которой постоянен. В соответствии с этим ведущее магнитное поле создается только в весьма ограниченной тороидальной области, занятой стационарным пучком. Поле увеличивается по мере того, как растет энергия частиц. Это удешевляет электромагнит и позволяет использовать синхротрон для получения самых высоких энергий. С другой стороны, циклический характер работы ускорителя приводит к относительно малой средней интенсивности.

Синхротрон пригоден для ускорения как протонов, так и электронов. Однако для электронов максимальная энергия ограничена энергетическими потерями при синхротронном излучении.

Структура кольцевого электромагнита синхротрона состоит из последовательно чередующихся магнитов и секций, в которых поле отсутствует. Для обеспечения устойчивости траекторий магнитное поле должно быть неоднородно: либо всюду иметь один и тот же небольшой отрицательный градиент dB/dr , либо иметь большой градиент, направление которого меняется от участка к участку. Такой принцип фокусировки называется фокусировкой знакопеременным градиентом, или сильной фокусировкой. Поле с переменным градиентом более удобно, так как оно значительно уменьшает амплитуду поперечных колебаний частиц, позволяя тем самым уменьшить размеры зазора между полюсами магнитов. Принцип сильной фокусировки был сформулирован Кристофилосом (1950 г.) и независимо Курантом, Снайдером и Ливингстоном (1952 г.).

Ускорение частиц осуществляется с помощью электрического ВЧ-поля, создаваемого в ускоряющих элементах, расположенных на пути пучка в определенных промежутках магнита, обеспечивающего ведущее магнитное поле.

Для того чтобы цикл ускорения проходил нормально, ускоряющее поле должно быть в резонансе с частотой обращения частиц. Это достигается непрерывным увеличением частоты поля соответственно частоте обращения частиц. На первый взгляд кажется, что для увеличения энергии частицы в соответствии с магнитным полем

согласно формуле (4) частица должна проходить ускоряющий прожектор при строго определенной фазе.

Оказывается, что не только частицы, находящиеся точно в резонансе с ускоряющим ВЧ-полем, но и те частицы, частота и фаза которых несколько отличаются, ускоряются правильно. Этот принцип «автофазировки» был открыт в 1944 г. В. И. Векслером и независимо Макмилланом в 1945 г. [18, 21].

В табл. 1 приведены характеристики нескольких синхротронов*, работающих в Европе, а также указаны два проекта, по которым можно судить о величине энергии, достижимой в ближайшем будущем.

Таблица 1

Характеристики некоторых синхротронов

Характеристики	Действующие машины			Проекты (1964 г.)	
	Сатурн (Сакле, Франция)	ПС ЦЕРН (Женева)	DESY (Гамбург)	ЦЕРН (Женева)	Сатурн (Сакле, Франция)
Максимальная энергия, <i>Гэв</i>	3	28	6	300	15
Частицы	Протоны	Протоны	Элект- роны	Протоны	Элек- троны
Тип поля (градиент) . . .	Постоян- ное	Перемен- ное	Перемен- ное	Перемен- ное	Перемен- ное
Радиус кривизны магнитов, <i>м</i>	8,42	70,8	31,7	834	135
Средний радиус, <i>м</i>	11	100	50,4	1200	196
Апертура вакуумной камер- ы ($\Delta r \cdot \Delta z$), <i>см</i> ²	30×10	14×7	14×6	10×6	10×6
Вес магнита, <i>т</i> (сталь) . .	1077	3400	370	29 000	-1000
Средняя мощность, потре- бляемая магнитом, <i>Мвт</i>	0,950	1,5	—	2,6	1,6
Максимальная ВЧ-мощ- ность, <i>Мвт</i>	—	96	350	7200	2100
Потери на излучение за оборот, <i>Мэв</i>	—	—	3,63	—	32,9
Частота циклов ускорения, <i>гц</i>	0,3	0,3	50	0,3	50
Число частиц в импульсе	3·10 ¹¹	6·10 ¹¹	10 ¹¹	3·10 ¹³	10 ¹¹
Средняя интенсивность, <i>мка</i>	1,6·10 ⁻²	3,2·10 ⁻²	0,8	1,6	0,8
Год пуска	1958	1959	1964	—	—

Накопительные кольца

Принцип действия. Основным элементом накопительного кольца является кольцевой магнит, подобный магниту синхротрона, но создающий постоянное поле. В этом поле происходит накопление

* Протонные синхротроны в отечественной литературе называют синхрофазотронами. — *Прим. ред.*

интенсивного пучка. Для существования пучка в течение десятков часов вакуум в камере должен быть порядка 10^{-9} тор (мм рт. ст.).

Два накопительных кольца могут соприкасаться друг с другом или переплетаться таким образом, чтобы их пучки пересекались под малым углом. В одном и том же кольце могут находиться электроны и позитроны, которые обращаются по кольцу в противоположных направлениях.

Интенсивность и плотность пучков ограничена неустойчивостями и потерями частиц, вызванными электромагнитным взаимодействием пучка с вакуумной камерой и пучка с пучком, а также взаимодействием между отдельными частицами.

Расчетная величина накопленного тока для случая двух электронных пучков составляет несколько десятков миллиампер на пучок, сечение которого порядка $\Delta r \cdot \Delta z \approx 2 \times 0,2 \text{ мм}^2$. * Проект накопительных колец ЦЕРНа для протонов с энергией 28 Гэ предусматривает ток около 8 а на пучок, сечение которого $6 \times 0,5 \text{ см}$.

При существовании двух пучков происходят столкновения между встречными частицами. Интерес к накопительным кольцам вызван тем, что энергия столкновения релятивистских частиц в системе координат, связанной с центром инерции, очень велика по сравнению с энергией взаимодействия пучка с неподвижной мишенью.

Энергетические соотношения при соударении релятивистских частиц. Пусть две частицы имеют одинаковые массы покоя. Выразим полную энергию одной частицы E в единицах $\gamma = E/E_0$, где E_0 — энергия покоя.

Для накопительных колец лабораторная система отсчета совпадает с системой отсчета, неподвижной относительно центра инерции сталкивающихся частиц. Пусть $\gamma_{ц.и}$ — энергия каждой частицы. Из преобразования Лоренца непосредственно следует, что энергия одной из этих частиц в системе отсчета, неподвижной относительно другой частицы

$$\gamma = 2\gamma_{ц.и}^2 - 1. \quad (18)$$

Таким образом, налетающая частица, взаимодействующая с неподвижной мишенью, должна иметь энергию γ примерно в $2\gamma_{ц.и}$ раз большую, чем энергия взаимодействия в системе центра инерции.

Формула (18) может быть получена путем использования инвариантности квадрата (четырёхмерного) вектора энергии — импульса q относительно изменения системы координат. Для одномерной задачи в реальном пространстве q одной частицы имеет компоненты cp, iE . Для двух частиц $q = q_1 + q_2$ и компоненты его равны $c(p_1 + p_2)$; $i(E_1 + E_2)$. В этом случае инвариантом является величина $q^2 = c^2(p_1 + p_2)^2 - (E_1 + E_2)^2 = c^2(p_1 + p_2)_{ц.и}^2 - (E_1 + E_2)_{ц.и}^2$. Пусть левая половина этого равенства относится к системе отсчета,

* На установках со встречными пучками в Новосибирске (ИЯФ СО АН СССР) получены накопленные токи электронов до 2 а, позитронов — до 20 ма [«Атомная энергия», 22, вып. 3 (1967)]. — Прим. ред.

в которой вторая частица покоится, а правая половина — к системе центра инерции. Тогда слева имеем $c^2 p_1^2 - (E_1 + E_0)^2$, поскольку

Таблица 2

Характеристики накопительных колец*

Лаборатория	Название установки	Тип частиц, число колец	Кинетическая энергия, Мэв			Состояние установки (конец 1965 г.)
			$T_{ц.и}$	T	$T'_{ц.и}$	
ОРСЕ (Франция)	ACO	$e^- e^+$, 1	500	$980 \cdot 10^3$	11,3	Опробование
Стенфорд (США)	—	$e^- e^-$, 2	500	$980 \cdot 10^3$	11,3	Работает
Новосибирск (СССР)	ВЭПП-2	$e^- e^+$, 1	700	$1,92 \cdot 10^6$	26,5	Наладка
Фраскати Нац. лабор. (Италия)	ADONE	$e^- e^+$, 1	$1,5 \cdot 10^3$	$8,80 \cdot 10^6$	19,6	Опробование намечалось на конец 1966 г.
Стенфорд (США)	—	$e^- e^+$, 1	$3 \cdot 10^3$	$35,2 \cdot 10^6$	27,7	Проект
ЦЕРН	CERN-ISR	pp , 2	$28 \cdot 10^3$	$1,69 \cdot 10^6$	$2,77 \cdot 10^3$	»

* $T_{ц.и}$ — кинетическая энергия частицы каждого пучка в лабораторной системе отсчета; T — кинетическая энергия одного из пучков в системе отсчета, связанной с другим пучком; $T'_{ц.и}$ — кинетическая энергия (в системе ЦИ), с которой происходило бы взаимодействие данного пучка с мишенью, неподвижной в лабораторной системе отсчета.

$p_2 = 0$ и $E_2 = E_0$, в то время как справа $(p_1 + p_2)_{ц.и} = 0$, $(E_1 + E_2)_{ц.и} = 2E_{ц.и}$. Учитывая, что $p_1^2 c^2 = E_1^2 - E_0^2$ [см. формулу (2.5)], получаем $E_1 = 2E_{ц.и} / E_0 - E_0$.

Для иллюстрации приведем характеристики действующих и проектируемых накопительных колец на энергию ≥ 500 Мэв (табл. 2).

Часть первая

ФОКУСИРУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ

Глава 1

СЕКТОРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ С ПОСТОЯННЫМ ГРАДИЕНТОМ

1.1. Операторы векторного анализа в цилиндрических координатах

В большинстве случаев магнитное поле циклических ускорителей удобно описывать в цилиндрических координатах r, θ, z , связанных с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta; \\ y &= r \sin \theta; \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Поскольку векторные операторы играют значительную роль в теории поля и при рассмотрении движения частицы в поле, то полезно вспомнить, как эти операторы выражаются в цилиндрических координатах. Вектор $V = \text{grad } \varphi$ в цилиндрической системе координат имеет следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} V_r &= \text{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ V_\theta &= \text{grad}_\theta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \\ V_z &= \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Оператор $\text{div } V = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z$ в цилиндрических координатах записывается в виде

$$\text{div } V = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial}{\partial z} V_z. \quad (1.3)$$

Это можно доказать, применяя теорему Гаусса

$$\iiint \text{div } V dv = \iint (V dS) \quad (1.4)$$

к элементарному объему Δv и ограничивающей его поверхности ΔS в цилиндрических координатах, показанных на рис. 7. Можно

рассматривать формулу (1.4) как определение дивергенции вектора \mathbf{V} . Для рассматриваемой элементарной ячейки

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{V} dv = (\operatorname{div} \mathbf{V}) r \Delta \theta \Delta r \Delta z. \quad (1.5a)$$

Группируя попарно интегралы по противоположным сторонам ячейки, для поверхностного интеграла получим

$$\begin{aligned} \iint \mathbf{V} dS = & \frac{\partial}{\partial r} (V_r r \Delta \theta \Delta z) \Delta r + \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \Delta r \Delta z) \Delta \theta + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \Delta r r \Delta \theta) \Delta z. \end{aligned} \quad (1.5b)$$

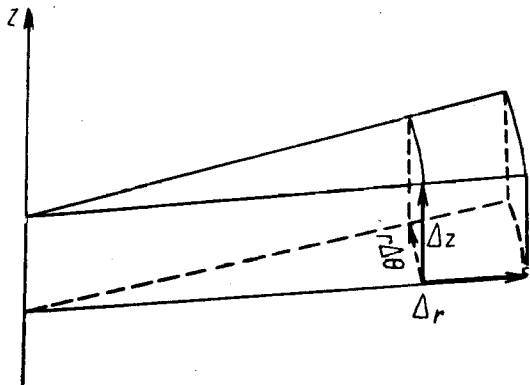


Рис. 7.

Приравняв интегралы (1.5a) и (1.5b) и поделив на $r \Delta r \Delta \theta \Delta z$, получим формулу (1.3). Оператор Лапласа

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$$

в цилиндрической системе координат получим, подставляя компоненты вектора $\mathbf{V} = \operatorname{grad} \varphi$ из системы уравнений (1.2) в формулу (1.3):

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.6)$$

Ротор вектора \mathbf{V} в декартовых координатах x, y, z удобно записывать в виде определителя:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix},$$

где u_i — единичные векторы координатных осей. В цилиндрических координатах $\text{rot } \mathbf{V}$ имеет следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathbf{V} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_\theta; \\ \text{rot}_\theta \mathbf{V} &= \frac{\partial}{\partial z} V_r - \frac{\partial}{\partial r} V_z; \\ \text{rot}_z \mathbf{V} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} V_r \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Покажем это, применяя теорему Стокса,

$$\iint \text{rot } \mathbf{V} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{V} ds, \quad (1.8)$$

где интегрирование производится по некоторой поверхности, ограниченной контуром. Теорему Стокса можно рассматривать как определение ротора. В качестве примера проведем интегрирование по поверхности объема, изображенного на рис. 7:

$$\iint \text{rot}_z \mathbf{V} d\mathbf{S} = (\text{rot}_z \mathbf{V}) r \Delta \theta \Delta r; \quad (1.9a)$$

$$\oint \mathbf{V} ds = \frac{\partial}{\partial r} (V_\theta r \Delta \theta) \Delta r - \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r \Delta r) \Delta \theta. \quad (1.9b)$$

Приравняв выражения (1.9a) и (1.9b) и разделив на $r \Delta r \Delta \theta$, получим z -компоненту ротора (1.7).

1.2. Векторный потенциал секторного поля с постоянным градиентом

В силу соотношений $\text{rot } \mathbf{B} = \delta$ и $\text{rot } \text{grad } \phi = 0$ индукция магнитного поля \mathbf{B} может быть получена из скалярного потенциала ϕ только в области без токов, где $\delta = 0$. Но так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и поскольку $\text{div } \text{rot } \mathbf{a} = 0$, \mathbf{B} может быть определен как ротор от некоторого вектора \mathbf{A} , называемого векторным потенциалом.

Магнитную индукцию \mathbf{B} удобно записывать как

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.10)$$

Это объясняется тем, что, во-первых, гамильтоновские уравнения движения частицы в магнитном поле содержат векторный потенциал и, во-вторых, для магнитного поля сектора, обладающего симметрией вращения с компонентой $B_\theta = 0$, векторный потенциал имеет только одну отличную от нуля компоненту $A_\theta(r, z) = A(r, z)$, через которую, как через скалярную величину, выражаются компоненты B_r и B_z , что упрощает решение.

Покажем, что для магнитного поля, удовлетворяющего условиям

$$B_\theta = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \text{ (симметрия вращения)}, \quad (1.12)$$

векторный потенциал имеет следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} A_r = A_z = 0; \\ A_\theta = A(r, z) \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Напишем компоненты вектора $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ в цилиндрических координатах:

$$\left. \begin{aligned} B_r = \text{rot}_r A &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\theta; \\ B_\theta = \text{rot}_\theta A &= \frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z = 0; \\ B_z = \text{rot}_z A &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} A_r. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

В соответствии с допущениями (1.11) и (1.12) в этих трех уравнениях положим $B_\theta = 0$ и отбросим два члена. Поскольку A_r и A_z не дают вклада в ненулевые компоненты B_r и B_z , их можно взять произвольными, например, $A_r \equiv A_z \equiv 0$. Таким образом, поле определяется единственной компонентой A_θ , так что в дальнейшем индекс θ можно опускать:

$$A_\theta = A = A(r, z). \quad (1.15)$$

Тогда компоненты поля

$$\left. \begin{aligned} B_r &= - \frac{\partial}{\partial z} A; \\ B_\theta &= 0; \quad B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Для такого магнитного поля, обладающего симметрией вращения, единственная компонента векторного потенциала имеет простой физический смысл. Для его выяснения предположим, что это поле не ограничено азимутальным сектором, а занимает область в виде круглого цилиндра. Тогда интеграл по окружности с центром, расположенным на оси вращения z , $\oint A_\theta ds = 2\pi r A_\theta$. С другой стороны, в силу теоремы Стокса,

$$\oint A_\theta ds = \iint \text{rot}_z A_\theta dS = \int B_z dS$$

есть с точностью до постоянной величины магнитный поток Ψ , сцепленный с окружностью. Таким образом, для поля с симметрией вращения

$$A_\theta = A = \frac{1}{2\pi r} \Psi + C, \quad (1.17)$$

т. е. вектор-потенциал пропорционален потоку Ψ .

1.3. Аналитическое выражение поля

Секторное поле с постоянным градиентом, используемое обычно в циклических ускорителях, имеет следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} B_{\theta} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} B &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

плоскость $z=0$ является плоскостью симметрии.

На рис. 8 представлено сечение такого поля, возникающего между двумя магнитными полюсами N и S , при некотором азимуте. В плоскости симметрии, называемой медианной плоскостью,

$$B_r(r, z=0) = 0. \quad (1.19)$$

Введя абсциссу $x = r - \rho$ и опуская индекс z , перепишем $B_z(r, z=0) = B(x)$. На практике обычно используются такие магниты, у которых поле в медианной плоскости меняется по линейному закону

$$B(x) = B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho} \right), \quad (1.20)$$

где $B_0 = B_0(x=0; z=0)$; n — показатель спада поля.

В общем случае показателем спада поля называется величина

$$n = -\frac{\rho}{B_0} \cdot \frac{dB}{dx}. \quad (1.21)$$

Создание поля, линейно зависящего от x , приводит к тому, что уравнения траекторий в таком поле оказываются практически линейными.

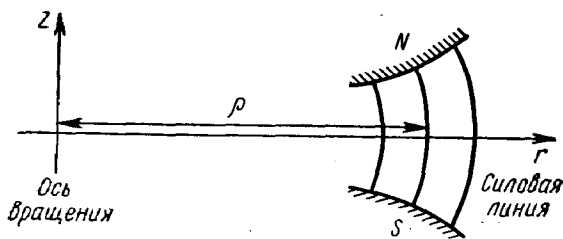


Рис. 8.

Найдем теперь выражение для векторного потенциала поля, определенного выражениями (1.18) и (1.20), а также аналитическим продолжением его компонент $B_r(x, z)$ и $B_z(x, z)$ вне медианной плоскости. Покажем, что поле, определенное выражениями (1.18) и (1.20), характеризуется векторным потенциалом

$$\left. \begin{aligned} A_r = A_z = 0, \\ A_\theta = A(\xi, \zeta) = B_0 \rho \left(\xi - \frac{1+n}{2} \xi^2 + \frac{n+3}{6} \xi^3 - \right. \\ \left. - \dots + \frac{n}{2} \zeta^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

где $\xi = x/\rho$; $\zeta = z/\rho$.

Компоненты векторного потенциала A представлены здесь в виде рядов, написанных по степеням отклонений ξ и ζ до членов третьей степени включительно. Отсюда можно получить путем дифференцирования компоненты поля с точностью до второго порядка.

Выражение (1.22) удовлетворяет, конечно, условиям (1.18) и уравнению $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} A \equiv 0$ для любого A . Остается показать, что $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, так как предполагается, что токи в зазоре между магнитами отсутствуют ($\delta = \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$) и, наконец, что поле B , определяемое потенциалом (1.22), совпадает в медианной плоскости с полем (1.20).

Справедливость последнего можно проверить непосредственными расчетами, определяя B_r и B_z в произвольной точке:

$$B_r = -\frac{\partial}{\partial z} A = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} A = -B_0 n \zeta \text{ с точностью до квадратичного члена по } \zeta, \text{ откуда}$$

$$B_r = -B_0 n \frac{z}{\rho}; \quad (1.23)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rA);$$

$$\begin{aligned} rA = \rho(1 + \xi) A = B_0 \rho^2 \left(\xi + \frac{1-n}{2} \xi^2 - \frac{n}{3} \xi^3 + \right. \\ \left. + \dots + \frac{n}{2} \zeta^2 + \frac{n}{2} \xi \zeta^2 + \dots \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (rA) = B_0 \rho \left[1 + (1-n) \xi - \right. \\ \left. - n \xi^2 + \dots + \frac{n}{2} \zeta^2 + \dots \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \frac{1}{\rho} (1 - \xi + \xi^2 - \dots) \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \\ = B_0 \left(1 - n \xi + \frac{n}{2} \zeta^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

с точностью до квадратичных членов по ξ и ζ . Таким образом,

$$B_z = B_0 \left[1 - n \frac{x}{\rho} + \frac{n}{2} \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right]. \quad (1.24)$$

Выражения (1.23) и (1.24) для B_r и B_z , совпадающие с выражениями (1.19) и (1.20) в плоскости $z = 0$, дают аналитическое выражение поля в произвольной точке, если только $\text{rot } \mathbf{V} = 0$. Покажем, что это условие выполнено:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{cases} \text{rot}_r \mathbf{V} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_\theta \equiv 0; \\ \text{rot}_\theta \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial z} B_r - \frac{\partial}{\partial r} B_z; \\ \text{rot}_z \mathbf{V} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \equiv 0. \end{cases}$$

Дифференцируя выражения (1.23) и (1.24), найдем

$$\frac{\partial}{\partial z} B_r = -\frac{B_0 n}{\rho}; \quad \frac{\partial}{\partial r} B_z = \frac{\partial}{\partial x} B_z = -\frac{B_0 n}{\rho}.$$

Следовательно, $\text{rot}_\theta \mathbf{V} = 0$.

1.4. Свойства секторного поля *

В силу условия $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ рассматриваемое магнитное поле имеет также и скалярный потенциал φ_m :

$$\mathbf{V} = -\text{grad } \varphi_m; \quad (1.25)$$

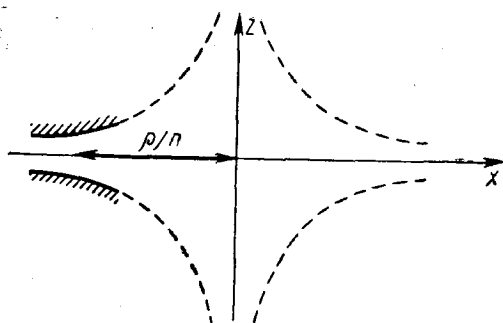


Рис. 9.

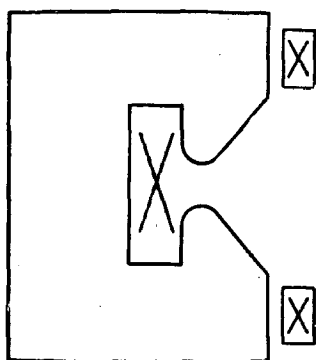


Рис. 10.

$$\varphi_m = -B_0 \left(1 - \frac{n}{\rho} x\right) z - \frac{1}{6} B_0 n \frac{z^3}{\rho^2} = B_0 \frac{n}{\rho} Xz \quad (1.26)$$

с точностью до квадратичных величин, причем

$$X = x - \frac{\rho}{n}. \quad (1.27)$$

* Секторное поле — участок магнитного поля, однородный по азимуту.

Легко видеть, что эквипотенциалами поля $\Phi_m = \text{const}$ являются гиперболы. Поле не изменится, если вдоль магнитной эквипотенциальной поверхности расположить поверхность из железа. Это позволяет создать нужное поле между полюсами магнита, имеющими гиперболический профиль $\Phi_m = \text{const}$, как показано на рис. 9.

На рис. 10 приведено сечение одного из типов магнитов ускорителя. Обмотка возбуждения расположена вблизи полюсов, чтобы уменьшить поток рассеяния магнитного поля.

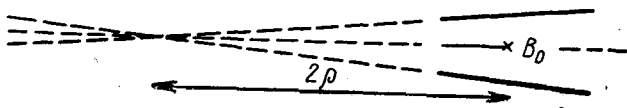


Рис. 11.

В связи с неравномерным насыщением полюсов магнита при высоких индукциях целесообразно принять в качестве верхнего предела n значение, определяемое условием

$$\left| \frac{n}{\rho} \right| = \frac{1}{B_0} \left| \frac{dB}{dr} \right| \lesssim 4,5\% \text{ см}^{-1}. \quad (1.28)$$

Это предельное значение n используется, например, в ускорителе на 33 Гэв (Брукхейвен), для которого поле в середине полезной зоны достигает $B_0 \approx 15 \text{ кгс}$.

Перепад поля в используемой зоне, где поле линейно зависит от радиальной координаты, составляет практически

$$\Delta B \approx \frac{2}{3} B_0, \quad (1.29)$$

причем величина индукции уменьшается от $B_{\text{макс}} \approx 20 \text{ кгс}$ до $B_{\text{мин}} \approx 10 \text{ кгс}$.

Таким образом, протяженность используемой зоны в радиальном направлении определяется предельным значением величины

$$\Delta r_n = \frac{1}{|n|} \cdot \frac{\rho}{B_0} \Delta B^*. \quad (1.30)$$

Ограничение размера Δr_n приводит на практике также к появлению верхнего предельного значения для величины показателя поля. Отметим, что для $n = 1/2$ поверхность полюсов магнита может быть изготовлена в виде плоскостей, продолжения которых пересекаются на расстоянии 2ρ от точки, где $B = B_0$ (рис. 11).

* Т. е. величиной $\Delta B/B'$ — отношением перепада поля к радиальному градиенту. Это позволяет в малоапертурных ускорителях повысить величину заворачивающего поля B_0 или отношения градиента к полю. — Прим. ред.

Глава 2

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В СЕКТОРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.1. Некоторые релятивистские соотношения

Напомним некоторые соотношения для энергии и импульса частицы, которые часто будут использоваться в последующем.

Уравнение движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях (уравнение Ньютона—Лоренца) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{s}) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{s}/c)^2}}; \quad (2.1a)$$

\mathbf{s} — радиус-вектор частицы.

Умножая скалярно обе части уравнения (2.1) на \dot{s} , получим один из интегралов уравнения движения, выражающий закон сохранения энергии:

$$\dot{s} \frac{d}{dt}(m\dot{s}) = \dot{s} \left[\frac{d}{dt}(m\dot{s}) \right]_{\dot{s}}$$

В квадратные скобки заключена компонента вектора, параллельная скорости \dot{s} , т. е. производная абсолютной величины импульса $m\dot{s}$.

Преобразуем скалярное произведение

$$\begin{aligned} \dot{s} \frac{d}{dt}(m\dot{s}) &= v \frac{d}{dt}(mv) = v \frac{d}{dt} \cdot \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d}{dt}(mc^2). \end{aligned}$$

Правую часть можно записать так:

$$e\mathbf{E}\dot{s} = -e \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -e \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad e[\dot{s} \times \mathbf{B}] \dot{s} = 0.$$

Итак, уравнение (2.1), умноженное скалярно на \dot{s} , принимает вид $\frac{d}{dt}(mc^2 + e\varphi) = 0$ или $mc^2 + e\varphi = \text{const}$.

Известно, что электростатический потенциал φ определен с точностью до постоянной величины. Выберем постоянную так, чтобы $\varphi = 0$ при $v = 0$. Тогда $mc^2 + e\varphi = m_0 c^2$ и

$$mc^2 - m_0 c^2 = -e\varphi. \quad (2.2)$$

Члены этого уравнения имеют следующий смысл: $m_0 c^2 = E_0$ — энергия покоя; $mc^2 = E$ — полная энергия; $-e\varphi = T$ — кинети-

ческая энергия, которая не может быть отрицательной — $\epsilon\varphi = T \geq 0$.
 Перепишем уравнение (2.2) в этих обозначениях:

$$E = E_0 + T. \quad (2.2a)$$

Интерпретация величины mc^2 как полной энергии частицы была дана в 1905 г. Эйнштейном.

Кинетическая энергия T может быть выражена как функция скорости

$$T = E - E_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

разлагая которую в ряд по степеням $v/c \ll 1$, получим

$$T = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots - 1 \right] \approx \frac{m_0 v^2}{2}, \quad (2.3)$$

выражение кинетической энергии в нерелятивистском приближении.

В случае движения в статическом магнитном поле при отсутствии электрического поля согласно уравнению (2.2) имеем:

$$\frac{d}{dt} (mc^2) = 0, \quad (2.2b)$$

т. е.

$$m = \text{const} \text{ и } v = \text{const}. \quad (2.4)$$

Из соотношения $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ получаем $(mc^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = m^2 v^2 c^2$ или, вводя импульс частицы $p = mv$, запишем последнее соотношение так:

$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2. \quad (2.5)$$

Приращения энергии и импульса связаны соотношением $\Delta E = v \Delta p$ [см. формулу (16.14)].

В релятивистской механике часто используются следующие обозначения:

$$\beta = v/c; \quad \gamma = E/E_0, \quad (2.6)$$

которые связаны формулами

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}; \quad (2.7)$$

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}. \quad (2.8)$$

Единицы измерения. Энергию принято измерять в электронвольтах (эВ), импульс p измеряют либо в электронвольтах, деленных на

скорость света, в соответствии с тем, что $p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{E_0}{c} \sqrt{\gamma^2 - 1} [эв/c]$, либо, в силу соотношения $\frac{p}{e} = B\rho$, в теслах на метр (*мл·м*).

Удобный способ приближенного расчета $B\rho$ для ультрарелятивистской частицы дается равенством

$$B\rho \simeq \frac{1}{e} \cdot \frac{E}{c} = \frac{\Phi}{c}. \quad (2.9)$$

Некоторые константы. Величины элементарного заряда e , скорости света c , массы покоя m_0 и энергии покоя E_0 для электронов и протонов равны соответственно:

$$e = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к};$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек};$$

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}; \\ E_0 &= 0,511 \text{ Мэв}; \end{aligned} \right\} \text{ для электрона}$$

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; \\ E_0 &= 938 \text{ Мэв}. \end{aligned} \right\} \text{ для протона}$$

Например, для протонов, ускоренных до максимальной энергии на синхротроне «Сатурн» (Сакле, Франция), $T = 3 \text{ Гэв}$; $E = T +$

$$+ E_0 = 3,94 \text{ Гэв}; \quad \gamma = E/E_0 = 4,20; \quad \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} = 0,971; \quad p = \frac{E_0}{c} \sqrt{\gamma^2 - 1} = 3,82 \text{ Гэв}/c; \quad \frac{p}{e} = B\rho = 12,7 \text{ мл}\cdot\text{м}.$$

2.2. Уравнения движения в цилиндрической системе координат

Разложим векторное уравнение движения (2.1) на три уравнения, соответствующие проекциям векторов на оси r , θ , z , цилиндрической системы координат.

Проекция вектора $\frac{d}{dt}$ (*мс*). Радиус-вектор, оканчивающийся на частице, можно представить как

$$\mathbf{s} = s_0 + r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z, \quad (2.10)$$

где s_0 — радиус-вектор начальной точки отсчета цилиндрической системы координат. Дифференцируя \mathbf{s} , получим

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{z}\mathbf{u}_z + z\dot{\mathbf{u}}_z. \quad (2.11)$$

Единичные векторы \mathbf{u}_r и \mathbf{u}_θ являются функциями угла и меняются со временем как $\theta(t)$. Напомним, чему равны производные от еди-

ничных векторов \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ и \mathbf{u}_z (рис. 12)

$$\left. \begin{aligned} du_r &= u_\theta d\theta; \\ du_\theta &= -u_r d\theta; \\ du_z &= 0; \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \dot{u}_r &= \dot{\theta} u_\theta; \\ \dot{u}_\theta &= -\dot{\theta} u_r; \\ \dot{u}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{s}) &= \left[\frac{d}{dt} (mr) - mr\dot{\theta}^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[\frac{d}{dt} (mr\dot{\theta}) + mr\ddot{\theta} \right] \mathbf{u}_\theta + \\ &+ \left[\frac{d}{dt} (m\dot{z}) \right] \mathbf{u}_z. \end{aligned} \quad (2.13)$$

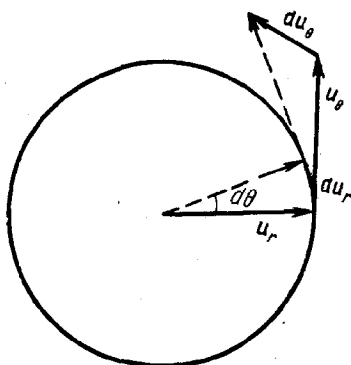


Рис. 12.

Компоненту по \mathbf{u}_θ в уравнении (2.13) можно преобразовать:

$$\frac{d}{dt} (mr\dot{\theta}) + mr\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}). \quad (2.14)$$

Проекция вектора $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. В цилиндрических координатах скорость \mathbf{v} имеет компоненты \dot{r} , $r\dot{\theta}$, \dot{z} . Соответственно вектор

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_z \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & \dot{z} \\ B_r & B_\theta & B_z \end{vmatrix} = (r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta)\mathbf{u}_r - \\ &+ (zB_r - \dot{r}B_z)\mathbf{u}_\theta + (\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r)\mathbf{u}_z. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Напряженность электрического поля \mathbf{E} в цилиндрической системе координат имеет компоненты E_r , E_θ , E_z . Введя их в уравнение (2.1), получим уравнения движения частицы в цилиндрической сис-

теме координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(mr\dot{\theta}) - mr\dot{\theta}^2 &= e(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta); \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= e(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z); \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= e(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r), \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где $mr\dot{\theta}^2$ — центробежная сила, а $mr^2\dot{\theta} = J_z$ — момент количества движения относительно оси z .

2.3. Траектория частицы в секторном магнитном поле с постоянным градиентом

Вывод уравнений движения

Уравнения (2.16) значительно упрощаются для случая азимутально однородного секторного магнитного поля с постоянным градиентом, удовлетворяющего условиям

$$B_\theta = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{E} = 0. \quad (2.17)$$

Условие осевой симметрии — второе условие (2.17) — позволяет выразить изменение потока магнитного поля Ψ через некоторый контур следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi r} \dot{\Psi} = -\dot{z}B_r + \dot{r}B_z, \quad (2.18)$$

где

$$\Psi = 2\pi \int_0^r B_z r dr. \quad (2.19)$$

Покажем это следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= 2\pi \frac{d}{dt} \int_0^r B_z(r, z) r dr = \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \int_0^r B_z r dr \right) \dot{r} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_0^r B_z r dr \right) \dot{z} \right] = \\ &= 2\pi \left[B_z r \dot{r} + \left(\int_0^r \frac{\partial B_z}{\partial z} r dr \right) \dot{z} \right] = 2\pi r (B_z \dot{r} - B_r \dot{z}), \end{aligned}$$

учитывая, что подынтегральное выражение в последнем интеграле было преобразовано по формуле

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rB_r), \quad (2.20)$$

выведенной из условия

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} B_\theta + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

[см. формулу (1.3)] с учетом осевой симметрии поля $dB_\theta/d\theta = 0$ [см. формулу (2.17)].

Ограничиваясь рассмотрением движения в отсутствие электрического поля ($E = 0$), когда, согласно выражению (2.3), $m = \text{const}$, получим, учитывая соотношение (2.18), что движение частицы в статическом секторном поле с осевой симметрией описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= er\dot{\theta}B_z; \\ mr^2\dot{\theta} + \frac{e}{2\pi} \Psi &= \text{const}; \\ m\ddot{z} &= -er\dot{\theta}B_r. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Второе уравнение, полученное в результате однократного интегрирования и связывающее момент количества движения $J_z = mr^2\dot{\theta}$ и магнитный поток, сцепленный с траекторией частицы, известно под названием теоремы Буша.

Наложим более строгие ограничения на поле, а именно, секторное магнитное поле выберем в виде, описанном ранее формулами (1.22)—(1.24). Напомним, что магнитный поток Ψ выражается через векторный потенциал A , в соответствии с формулой (1.17), как $\frac{1}{2\pi r} \Psi = A$. Обозначим v_θ компоненту линейной скорости v :

$$v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (2.22)$$

Тогда уравнения движения частицы в магнитном секторном поле, определенном выше, можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{mv_\theta^2}{r} + ev_\theta B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho} + \dots \right); \\ mrv_\theta + eB_0 r\rho \left(\frac{x}{\rho} + \dots \right) &= \text{const}; \\ m\ddot{z} &= ev_\theta B_0 n \frac{z}{\rho} (1 + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Многоточием обозначены величины более высокого порядка, чем x/ρ , z/ρ . Частным решением уравнений (2.23) является

$$\left. \begin{aligned} x &= r - \rho = 0; \\ z &= 0; \\ mv_\theta &= \text{const} = -eB_0\rho. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Найдем теперь решение $x(t)$, $z(t)$, близкое к частному решению (2.24). Примем во внимание, что отклонения x/ρ , z/ρ , \dot{x}/v_0 и \dot{z}/v_0 — бесконечно малые величины, по ним можно разложить уравнения (2.23), сохраняя только величины первого порядка малости. Отбрасывая в уравнениях (2.23) члены высшего порядка малости и раскладывая в ряд скорость

$$v = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}}{v_0}\right)^2} \approx v_0, \quad (2.25)$$

преобразуем уравнения (2.23) к виду

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{mv^2}{r} + evB_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho}\right); \\ mrv + erB_0 x &= \text{const}; \\ m\ddot{z} &= evB_0 n \frac{z}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Исключим далее время как независимую переменную, заменив ее длиной дуги $s = vt$, которую проходит частица с постоянной скоростью v . Вторая производная по времени в этом случае преобразуется как

$$\frac{d^2}{dt^2} = v^2 \frac{d^2}{ds^2}. \quad (2.27)$$

Уравнения движения запишутся тогда в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} = x'' &= \frac{1}{r} + \frac{e}{mv} B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho}\right); \\ mrv + erB_0 x &= \text{const}; \\ \frac{d^2 z}{ds^2} = z'' &= \frac{e}{mv} B_0 n \frac{z}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Разложим в ряды следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} mv &= p = p_0 + \Delta p; \\ \frac{1}{mv} &= \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right); \\ r &= \rho + x; \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (2.28) и учитывая, что $p_0 = -eB_0\rho$ [см. уравнения (2.24)], получаем окончательную форму записи дифференциальных уравнений траектории частицы в сек-

торном магнитном поле с точностью до величин первого порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \frac{1-n}{\rho^2} x &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}; \\ \Delta\rho &= \text{const}; \\ z'' + \frac{n}{\rho^2} z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Обсуждение решений. Если

$$n > 0 \text{ и } 1-n > 0, \quad (2.31)$$

то решением уравнений (2.30) являются гармонические колебания вида

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta x + a_1 \sin \frac{s}{\lambda_x} + a_2 \cos \frac{s}{\lambda_x}; \\ z &= a_3 \sin \frac{s}{\lambda_z} + a_4 \cos \frac{s}{\lambda_z}, \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

где

$$\Delta x = \frac{\rho \Delta\rho}{(1-n)\rho}; \quad \lambda_x = \frac{\rho}{\sqrt{1-n}}; \quad \lambda_z = \frac{\rho}{\sqrt{n}}. \quad (2.33)$$

Частное решение $x = \Delta x$ представляет окружность. Величина $\Delta x/(\Delta\rho/\rho)$ дает радиальный сдвиг орбиты при изменении импульса, т. е. хроматическую дисперсию. Общее решение $x(s)$ имеет вид гармонических колебаний около окружности $x = \Delta x$. Этот тип колебаний получил название *бетатронных колебаний* в связи с тем, что они впервые были изучены для бетатрона Керстом и Сербером в 1941 г. Величины λ_x и λ_z представляют собой длины бетатронных волн, деленные на 2π .

Если одно из условий (2.31) не выполнено, то либо \sqrt{n} , либо $\sqrt{1-n}$ будут соответственно мнимыми. Поскольку $\sin i\alpha = -\text{sh } \alpha$ и $\cos i\alpha = \text{ch } \alpha$, решение уравнений (2.30) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta x + a_1 \text{sh} \frac{\sqrt{|1-n|}}{\rho} s + a_2 \text{ch} \frac{\sqrt{|1-n|}}{\rho} s; \\ z &= a_3 \text{sh} \frac{\sqrt{|n|}}{\rho} s + a_4 \text{ch} \frac{\sqrt{|n|}}{\rho} s. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Это решение не является ограниченным, т. е. траектории частиц в этом случае неустойчивы.

Условием устойчивости траектории сразу по двум направлениям, по x и z , является в случае поля с постоянным по азимуту градиентом одновременное выполнение неравенств

$$n > 0; \quad 1-n > 0,$$

или

$$0 < n < 1. \quad (2.35)$$

Азимутальный угол θ в качестве независимой переменной. Часто в уравнения (2.30) вводят переменную θ путем замены

$$d\theta = \frac{ds}{\rho}. \quad (2.36)$$

Уравнения траектории принимают тогда форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\theta^2} + (1-n)x &= \rho \frac{\Delta p}{p}; \\ \frac{d^2z}{d\theta^2} + nz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Если n удовлетворяет условию устойчивости (2.35), то траектории принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta x + a_1 \sin v_x \theta + a_2 \cos v_x \theta; \\ z &= a_3 \sin v_z \theta + a_4 \cos v_z \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

где

$$\Delta x = \frac{\rho}{1-n} \cdot \frac{\Delta p}{p}; \quad v_x = \sqrt{1-n}; \quad v_z = \sqrt{n}, \quad (2.39)$$

а v_x и v_z равны числу бетатронных колебаний на одном обороте и связаны в данном случае соотношением

$$v_x^2 + v_z^2 = 1. \quad (2.40)$$

Глава 3

ГАМИЛЬТОНИАН ЧАСТИЦЫ

3.1. Введение

Гамильтоновский формализм, т. е. описание системы с помощью обобщенных координат и импульсов, иногда дает следующие преимущества: 1) достаточно исследовать лишь канонически сопряженные переменные, так как все остальные величины выражаются через эти переменные; 2) форма канонических уравнений сохраняется при замене переменных.

С целью получения канонических уравнений Гамильтона для частицы, движущейся в магнитном поле ускорителя, воспользуемся общим выражением гамильтоновой функции для заряженной частицы в электрическом и магнитном полях:

$$\mathcal{H}(p, q) = e\varphi(q) + c\sqrt{[p - eA(q)]^2 + m_0^2 c^2}, \quad (3.1)$$

где p и q — некоторые канонические переменные.

Посредством канонического преобразования введем в этот гамильтониан в качестве новой переменной длину дуги s некоторой реперной кривой $r_0(s)$, от которой будем отсчитывать расстояния X и Z в плоскости, перпендикулярной к ней. Такой выбор переменных удобен тем, что в качестве кривой $r_0(s)$ можно выбрать одну из возможных траекторий. Тогда интегралы $X(s)$ и $Z(s)$ будут описывать бетатронные колебания около реперной траектории («равновесной» орбиты).

Используя далее гамильтониан именно в такой форме, получим уравнения движения частицы в секторном магнитном поле с постоянным градиентом и убедимся, что решение их совпадает с решением уравнения Ньютона-Лоренца, полученным прежде.

3.2. Обобщенные координаты и импульсы

Допустим, что \mathcal{H} первоначально выражена в декартовых координатах $q_{1,2,3} = x, y, z$. Соответствующие сопряженные импульсы обозначим

$$p_{1,2,3} = p_x, p_y, p_z \\ (p_x = m\dot{x} + eA_x \text{ и т. д.}).$$

Выберем в качестве новых координат координаты Q_i в системе сопровождающего трехгранника реперной кривой. Оси трехгранника совпадают с касательной, главной нормалью и бинормалью к реперной кривой $r_0(s)$. Радиус-вектор некоторой точки пространства в новых координатах выражается так:

$$r(s, X, Z) = r_0(s) + Xn + Zb, \quad (3.2)$$

где s — длина дуги реперной кривой; n — единичный вектор главной нормали; b — единичный вектор бинормали. Напомним, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_0}{ds} &= t; \\ \frac{dn}{ds} &= \Omega t + \omega b; \\ \frac{db}{ds} &= -\omega n, \\ \frac{dt}{ds} &= -\Omega n, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где t — единичный вектор касательной; $\Omega = 1/\rho$ — кривизна реперной кривой; ω — кручение этой кривой.

Производящая функция, которая определяет каноническое преобразование декартовых координат и импульсов p, q к новым переменным P, Q , имеет вид

$$F(p, Q) = -pr(Q) = -p[r_0(s) + Xn + Zb]. \quad (3.4)$$

Производные $-\partial F/\partial p_i = q_i$ дают старые координаты, а производные по новым координатам $Q_i = s, X, Z$ равны сопряженным с ними импульсам P_i :

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}. \quad (3.5)$$

Таким образом, $P_s = -\frac{\partial F}{\partial s} = \mathbf{p} \left[\frac{\partial r_0}{\partial s} + X \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} + Z \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right] = \mathbf{p} [(1 + \Omega X)t + \omega X \mathbf{b} - \omega Z \mathbf{n}]$.

В дальнейшем будем рассматривать только плоскую реперную кривую, например, замкнутую плоскую орбиту, которая имеется в ускорителях с магнитным полем, обладающим медианной плоскостью. В этом случае

$$\omega = 0 \quad (3.6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} P_s &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{t} (1 + \Omega X); \\ P_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}; \\ P_z &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Заметим, что P_x и P_z есть проекции \mathbf{p} на соответствующие оси сопровождающего трехгранника, что нельзя сказать относительно P_s . В соответствии с теорией канонических преобразований преобразованные компоненты A_s, A_x, A_z векторного потенциала \mathbf{A} определяются так же, как компоненты импульса:

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} (1 + \Omega X); \\ A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}; \\ A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

В последующем ограничимся магнитными полями, обладающими не только плоскостью симметрии, но и симметрией вращения, как, например, секторное магнитное поле, поле квадруполь (при $\Omega = 1/\rho \rightarrow \infty$) или участок с нулевым полем. В таких полях реперная кривая, являющаяся замкнутой орбитой, будет окружностью. Векторный потенциал \mathbf{A} имеет только одну отличную от нуля компоненту. В прежних координатах

$$\left. \begin{aligned} A_t &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \neq 0; \\ A_x &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0; \\ A_z &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Преобразуем теперь к новым переменным выражение $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2$ которое входит в гамильтониан (3.1). Учитывая (3.7) и (3.8), получаем для трех ортогональных проекций вектора $(\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ на оси сопровождающего трехгранника Серре — Френе

$$(\mathbf{p}-e\mathbf{A})_t = \frac{P_s - eA_s}{1 + \Omega X}; \quad (\mathbf{p}-e\mathbf{A})_x = P_X - eA_X = P_X;$$

$$(\mathbf{p}-e\mathbf{A})_z = P_Z - eA_Z = P_Z,$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 = \frac{(P_s - eA_s)^2}{(1 + \Omega X)^2} + P_X^2 + P_Z^2. \quad (3.10)$$

Подставляя это выражение в гамильтониан (3.1), получаем

$$\mathcal{H}(P, Q) = e\varphi + c \sqrt{\frac{(P_s - eA_s)^2}{(1 + \Omega X)^2} + P_X^2 + P_Z^2 + m_0^2 c^2}. \quad (3.11)$$

Желательно, наконец, вместо времени t ввести в качестве новой независимой переменной длину дуги s . Перейдем для этого к новой функции Гамильтона, принимая во внимание тот факт, что величины \mathcal{H} и P играют эквивалентную роль в действии. Это следует из условия минимальности действия:

$$\delta \int_A^B \sum_i P_i dQ_i - \mathcal{H} dt = 0.$$

Решая уравнение (3.11) относительно $P_s = -G$, получим новый гамильтониан, который имеет в качестве независимой переменной уже не время, а переменную, сопряженную с импульсом P_s , т. е. длину дуги s реперной траектории:

$$G(-\mathcal{H}, P_X, P_Z, X, Z, s) = -eA_s - (1 + \Omega X) \times \\ \times \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2}{c^2} - m_0^2 c^2 - P_X^2 - P_Z^2}. \quad (3.12)$$

В этом выражении P_X и P_Z являются x - и z -проекциями импульса, однако A_s не является проекцией вектора \mathbf{A} на реперную окружность и определяется формулой (3.8).

Таким образом, канонические уравнения для траектории частицы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= \frac{\partial G}{\partial P_X}; & \frac{dP_X}{ds} &= -\frac{\partial G}{\partial X}; \\ \frac{dZ}{ds} &= \frac{\partial G}{\partial P_Z}; & \frac{dP_Z}{ds} &= -\frac{\partial G}{\partial Z}; \\ \frac{dt}{ds} &= -\frac{\partial G}{\partial \mathcal{H}}; & \frac{d\mathcal{H}}{ds} &= \frac{\partial G}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

3.3. Сравнение с уравнениями Ньютона—Лоренца

Упростим вначале гамильтониан (3.12), разложив его в ряд по степеням малых величин $\Delta p/p_0$, P_X/p_0 , p_Z/p_0 , X/ρ , Z/ρ . Чтобы получить линейное дифференциальное уравнение для траектории, ограничимся в гамильтониане членами второго порядка малости. Принимая во внимание выражение импульса p , получим следующее разложение:

$$\frac{\mathcal{H}^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = p^2 = p_0^2 \left[1 + 2 \frac{\Delta p}{p_0} + \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 \right].$$

Кроме того, $-p_0 = eB_0 \rho$ и $A_s = A_0 \left(1 + \frac{X}{\rho} \right)$, где A_0 определено формулой (1.22):

$$A_0 = B_0 \rho \left[\frac{X}{\rho} - \frac{1+n}{\rho} \left(\frac{X}{\rho} \right)^2 + \frac{n}{2} \left(\frac{Z}{\rho} \right)^2 + \dots \right].$$

Таким образом, получаем

$$G = -p_0 \left[1 + \left(1 + \frac{X}{\rho} \right) \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{(1-n)}{2} \left(\frac{X}{\rho} \right)^2 - \frac{n}{2} \left(\frac{Z}{\rho} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{P_X}{p_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{P_Z}{p_0} \right)^2 \right]. \quad (3.14)$$

Подставляя это выражение гамильтониана в (3.13), получаем уравнения вида

$$\frac{dX}{ds} = \frac{\partial G}{\partial P_X} = \frac{P_X}{p_0}; \\ \frac{d^2 X}{ds^2} = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{dP_X}{ds} = -\frac{1}{p_0} \cdot \frac{\partial G}{\partial X}; \\ \frac{d^2 X}{ds^2} = -(1-n) \frac{X}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}; \quad (3.15)$$

$$\frac{dZ}{ds^2} = \frac{\partial G}{\partial P_Z} = \frac{P_Z}{p_0}; \\ \frac{d^2 Z}{ds^2} = \frac{1}{p_0} \frac{dP_Z}{ds} = -\frac{1}{p_0} \cdot \frac{\partial G}{\partial Z}; \\ \frac{d^2 Z}{ds^2} = -n \frac{Z}{\rho^2}, \quad (3.16)$$

что совпадает с уравнениями Ньютона—Лоренца (2.30).

Часть вторая
**ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФОКУСИРУЮЩАЯ
СТРУКТУРА**

Глава 4
**ОСНОВЫ МАТРИЧНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ**

4.1. Элементарные операции

Здесь излагаются лишь те правила матричного исчисления, которые используются в корпускулярной оптике и в теории ускорителей. В основном рассматриваются операции над матрицами второго порядка (реже — третьего) и операции над матрицами — строками и столбцами.

Матрица — это линейный оператор, который сопоставляет одно векторное поле с другим. Вектор характеризуется своими компонентами; рассматриваемые здесь векторы на плоскости имеют две компоненты:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Линейное преобразование векторного поля \mathbf{x} в другое векторное поле \mathbf{y} имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2; \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Символически это можно записать так: $\mathbf{y} = (a) \mathbf{x}$, где

$$(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Можно рассматривать выражение $(a)\mathbf{x}$ как произведение матрицы на вектор, правила умножения для которого определяются формулой (4.2).

Произведение скалярной величины k на матрицу (a)

$$k(a) = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Сложение матриц производится по элементам

$$(a) + (b) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

и удовлетворяет распределительному закону

$$[(a) + (b)] x = (a) x + (b) x. \quad (4.6)$$

Произведение двух матриц $(m) = (b)(a)$ есть матрица, которая определяется последовательным умножением двух матриц на вектор:]

$$(m) x = [(b) (a)] x = (b) [(a) x]. \quad (4.7)$$

Легко проверить, что

$$m_{ik} = [(b) (a)]_{ik} = \sum_l b_{il} a_{lk} \quad (4.8)$$

и что в общем случае произведение матриц не подчиняется переместительному закону

$$(b) (a) \neq (a) (b). \quad (4.9)$$

Элемент произведения трех матриц определяется по формуле

$$[(c) (b) (a)]_{ik} = \sum_{l, m} c_{il} b_{lm} a_{mk}. \quad (4.10)$$

Пусть векторы x и y связаны соотношением $y = (a)x$. Обратная матрица $(a)^{-1}$ определяется как матрица, выполняющая следующее преобразование:

$$x = (a)^{-1} y.$$

Подставляя это выражение в предыдущее соотношение, получаем

$$y = (a) (a)^{-1} y.$$

Для того чтобы в результате преобразования получался тот же самый вектор, необходимо условие

$$(a) (a)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (4.11)$$

Такая матрица называется единичной. Уравнение (4.11) представляет собой краткую запись системы четырех уравнений

$$[(a) (a)^{-1}]_{ik} = \sum_l a_{il} a_{lk}^{-1} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2),$$

откуда определяются четыре неизвестных

$$(a)^{-1} = \frac{1}{\|a\|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Здесь $\|a\| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ — определитель матрицы (a) .

Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей

$$\|(a) (b)\| = \|a\| \cdot \|b\|, \quad (4.13)$$

что легко показать, сравнив вычисленные выражения левой и правой частей равенства.

Рассмотрим геометрический смысл определителя. Пусть поверхность S_x задана декартовыми координатами x_1, x_2 , а поверхность S_y — декартовыми координатами y_1, y_2 . Уравнение $y = (a)x$ можно толковать как переход от какой-либо точки на поверхности S_x к точке на поверхности S_y или как переход от элемента поверхности dS_x к элементу dS_y .

Покажем, что определитель (a) равен увеличению элемента поверхности

$$G = \frac{dS_y}{dS_x} = \|a\|. \quad (4.14)$$

Для этого рассмотрим поверхность треугольника на плоскости S_x с вершинами, определенными радиус-векторами $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$. Для простоты выберем $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ ($x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$). Площадь треугольника

$$\Delta S_x = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Треугольник, полученный в результате преобразования на плоскости S_y , имеет площадь

$$\begin{aligned} \Delta S_y &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11} x_1^{(1)} + a_{12} x_2^{(1)} & a_{11} x_1^{(2)} + a_{12} x_2^{(2)} \\ a_{21} x_1^{(1)} + a_{22} x_2^{(1)} & a_{21} x_1^{(2)} + a_{22} x_2^{(2)} \end{vmatrix} = \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \left| (a) \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (4.13), имеем

$$\Delta S_y = \frac{1}{2} \|a\| \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} = \|a\| \Delta S_x.$$

4.2. Матрица перехода (МП)

МП и линейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + J(s) \frac{dy}{ds} + K(s) y = 0 \quad (4.15)$$

и какой-нибудь интеграл $y(s)$ этого уравнения. Определим вектор $y(s)$ с помощью интеграла $y(s)$ и его производной следующим

образом:

$$y(s) = \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Тогда можно показать, что между значениями вектора y в двух точках $s = s_0$ и $s = s_1$ существует соотношение

$$y(s_1) = M(s_1|s_0) \cdot y(s_0), \quad (4.17)$$

где матрица $M(s_1|s_0)$ не зависит от значения $y(s)$; $M(s_1|s_0)$ — матрица для участка от s_0 до s_1 уравнения (4.15). Она характеризует общее решение данного дифференциального уравнения. Докажем это утверждение. Введем два частных решения $\sigma(s)$ и $\tau(s)$, которые определяются их значениями и значением их производных в начальной точке $s = s_0$ интервала:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 = 1; \quad \sigma'_0 = 0; \\ \tau_0 = 0; \quad \tau'_0 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Всякое решение линейного дифференциального уравнения может быть представлено как линейная комбинация двух частных решений, поэтому общее решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} y(s) &= y_0 \sigma(s) + y'_0 \tau(s); \\ y'(s) &= y_0 \sigma'(s) + y'_0 \tau'(s), \end{aligned}$$

где y_0 и y'_0 — значения решения и его производной при $s = s_0$.

Принимая во внимание уравнения (4.18), убеждаемся, что правые части этих уравнений совпадают с левыми. Для $s = s_1$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 \sigma_1 + y'_0 \tau_1; \\ y'_1 &= y_0 \sigma'_1 + y'_0 \tau'_1, \end{aligned}$$

что можно записать также в виде

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_1 = M \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0,$$

где

$$M = M(s_1|s_0) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \sigma' & \tau' \end{pmatrix}_{(s_0|s_1)}, \quad (4.19)$$

что и требовалось доказать. Более того, видим, что элементами матрицы перехода являются значения частных решений σ и τ уравнения и их производных, взятых в конечной точке отрезка $s = s_1$. Для того чтобы получить элементы матрицы, необходимо знать частные решения τ и σ . Элементы матрицы перехода являются действительными величинами, если существуют действительные решения данного уравнения.

Матрица перехода для некоторых элементарных интервалов

Свободный от поля промежуток (O). Пусть задан промежуток длины $s_1 - s_0 = l$ и траектория с начальными условиями y_0 и $y_0' = \text{tg } \alpha$ (рис. 13). Поле в промежутке отсутствует. Определим y_1 и y_1' сначала геометрически, затем с помощью матрицы перехода.

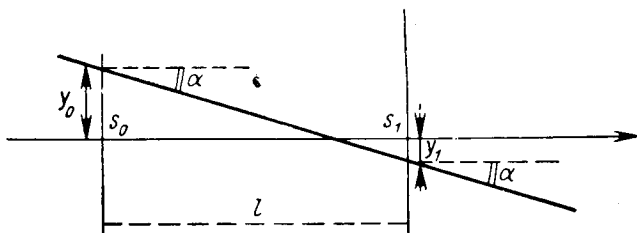


Рис. 13.

Из геометрического рассмотрения имеем $y_1 = y_0 + l \text{tg } \alpha = y_0 + l y_0'$; $y_1' = y_0'$. Соответствующая матрица перехода равна

$$O(y_1/y_0) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Определим теперь элементы матрицы перехода последовательно, исходя из значений функций σ и τ . Траектории являются прямыми линиями, поэтому в соответствии с определениями (4.18) положим

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= 1; & \tau(s) &= s - s_0; \\ \sigma'(s) &= 0; & \tau'(s) &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица перехода

$$O(s_1/s_0) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_1 \\ \sigma_1' & \tau_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

что согласуется с формулой (4.20).

Фокусирующий сектор магнитного поля (F). Уравнение траектории в фокусирующем секторе имеет вид [см. формулы (2.30) и (2.31)] $y'' + Ky = 0$; $K > 0$. Решение его есть

$$y = c_1 \sin \sqrt{K}s + c_2 \cos \sqrt{K}s.$$

Отсюда, принимая во внимание уравнения (4.18), имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \cos [\sqrt{K}(s - s_0)]; \\ \sigma' &= -\sqrt{K} \sin [\sqrt{K}(s - s_0)]; \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{K}} \sin [\sqrt{K}(s - s_0)]; \\ \tau' &= \cos [\sqrt{K}(s - s_0)]. \end{aligned}$$

Соответственно матрица перехода для интервала $(s_1|s_0)$ в фокусирующем секторе

$$F(s_1|s_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

где $\varphi = \sqrt{K}(s_1 - s_0)$.

Дефокусирующий сектор магнитного поля (D). Уравнение траектории в дефокусирующем секторе имеет вид $y'' = Ky + 0$; $K < 0$. Общее решение его

$$y = c_1 \operatorname{sh}(\sqrt{-K}s) + c_2 \operatorname{ch}(\sqrt{-K}s),$$

откуда для элементов матрицы перехода получаем

$$\sigma = \operatorname{ch}[\sqrt{-K}(s - s_0)];$$

$$\sigma' = \sqrt{-K} \operatorname{sh}[\sqrt{-K}(s - s_0)];$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh}'[\sqrt{-K}(s - s_0)];$$

$$\tau' = \operatorname{ch}[\sqrt{-K}(s - s_0)].$$

Соответственно матрица перехода для отрезка $(s_1 | s_0)$ в дефокусирующем секторе

$$D(s_1|s_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh} \psi \\ \sqrt{-K} \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

где $\psi = \sqrt{-K}(s_1 - s_0)$.

Матрица перехода для последовательности участков

Общие соотношения. Если известны элементы частных матриц перехода для простых участков, таких, как F , O , D , то можно ли через эти элементы выразить общую матрицу перехода для участка, состоящего из последовательности элементарных участков?

Пусть два последовательных участка характеризуются соответственно частными матрицами $A(a)$ и $B(b)$. Тогда решения в точках $s = s_1$ и $s = s_2$ можно представить как

$$y_1 = (a) y_0; \quad y_2 = (b) y_1.$$

Найдем матрицу перехода M для полного интервала от s_0 до s_2 :

$$y_2 = M y_0.$$

В соответствии с уравнениями (4.7) и (4.8) имеем

$$y_2 = (b) [(a) \cdot y_0] = M y_0.$$

где

$$m_{ik} = \sum_l b_{il} a_{lk}, \quad (4.24)$$

т. е. общая матрица равна произведению матриц участков.

Матрица перехода для секции синхротрона „Сатурн“

Секция синхротрона «Сатурн» состоит из фокусирующего участка F и свободного промежутка O , в котором поле отсутствует. Каждая секция характеризуется двумя матрицами перехода, соответствующими радиальному x и аксиальному z движениям. Обе матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} M = OF &= \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi - l \sqrt{K} \sin \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi + l \cos \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Впоследствии будет рассмотрено движение частицы в такой секции.

Определитель матрицы перехода

Вронскиан. Пусть $g_1(s)$ и $g_2(s)$ — линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения. Определитель матрицы, составленной из решений g_1 и g_2 и их производных

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{vmatrix} = (g_1 g_2' - g_2 g_1') = W(s), \quad (4.26)$$

называется *вронскианом* данного дифференциального уравнения.

Пусть дано уравнение типа (4.15). Покажем, что между значениями W в точках s и s_0 имеет место соотношение

$$W(s) = W(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s J(s) ds \right]. \quad (4.27)$$

В частности, для уравнения типа $y'' + Ky = 0$, $J = 0$ должно быть

$$W(s) = \text{const}. \quad (4.28)$$

Для этого подставим решения g_1 и g_2 в уравнение (4.15) и умножим первое из них на g_2 , а второе — на g_1 . Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$\begin{aligned} &g_1 g_2'' - g_2 g_1'' + J(g_1 g_2' - g_2 g_1') = \\ &= \frac{d}{ds} (g_1 g_2' - g_2 g_1') + J(g_1 g_2' - g_2 g_1') = 0. \end{aligned}$$

В круглых скобках находится вронскиан, поэтому уравнение можно записать в виде $\frac{d}{ds} W + JW = 0$. Интегрируя его, получаем

$$W = W_0 \exp \left[- \int_{s_0}^s J ds \right].$$

Определитель матрицы перехода. Пусть дано уравнение типа (4.15). Матрица перехода между начальной точкой s_0 и некоторой произвольной точкой s в соответствии с формулами (4.19) имеет вид

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \sigma' & \tau' \end{pmatrix}_s.$$

Определитель этой матрицы

$$\|M(s | s_0)\| = (\sigma\tau' - \tau\sigma')_s$$

и есть вронскиан, значение которого в точке s_0

$$W_0 = (\sigma_0 \tau'_0 - \tau_0 \sigma'_0) = 1.$$

Из этого следует, что

$$\|M(s | s_0)\| = \exp \left[- \int_{s_0}^s J ds \right]. \quad (4.29)$$

При $J = 0$, т. е. в случае уравнения типа $y'' + Ky = 0$, имеем

$$\|M(s | s_0)\| = 1. \quad (4.30)$$

МП и затухание колебаний. МП устанавливает связь между значениями вектора $y(s)$, характеризующего положение и скорость частицы в пучке, для двух последовательных значений s_0 и s независимой переменной [см. уравнения (4.19)]:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s = M(s | s_0) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s_0}.$$

В фазовой плоскости с координатами y и y' пучок занимает поверхность $S = \iint dy dy'$, где интегрирование производится по всем значениям y и y' , встречающимся в пучке для данного значения натурального параметра s . Определитель МП равен увеличению G этой поверхности S при переходе от s_0 к s [см. формулу (4.14)]:

$$G(s | s_0) = \frac{S}{S_0} \|M(s | s_0)\|. \quad (4.31)$$

В частности, для уравнения (4.30), в котором характеризующий затухание колебаний коэффициент при y' равен нулю, поверхность S , занимаемая пучком в фазовой плоскости (y, y') , является инвариантом.

МП с учетом хроматической aberrации. Матричный метод может быть обобщен и использован при решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений, например уравнения для радиальной компоненты $x(s)$ радиус-вектора частицы, движущейся в магнитном секторном поле, в случае, когда импульс частицы отличается от расчетного на величину $\Delta p/p$ [см. формулы (2.30)]:

$$x'' + Kx = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{p}; \quad [K = \frac{1-n}{\rho^2}].$$

Общее решение* этого неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(s) = x_0 \sigma(s) + x'_0 \tau(s) + \frac{\Delta p}{p} \pi(s), \quad (4.32)$$

где $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ — частные решения однородного уравнения, удовлетворяющие условиям (4.18); π — частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям*

$$\pi_0 = \pi'_0 = 0. \quad (4.33)$$

Для $K > 0$

$$\left. \begin{aligned} \pi(s) &= \frac{1}{\rho K} [1 - \cos \sqrt{K}(s-s_0)]; \\ \pi'(s) &= \frac{1}{\rho \sqrt{K}} \sin \sqrt{K}(s-s_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Для $K < 0$

$$\left. \begin{aligned} \pi(s) &= \frac{-1}{\rho(-K)} [1 - \text{ch} \sqrt{-K}(s-s_0)]; \\ \pi'(s) &= \frac{1}{\rho \sqrt{-K}} \text{sh} \sqrt{-K}(s-s_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Значения координаты $x(s)$, скорости $x'(s)$ и приращения импульса $\Delta p/p$ на отрезке с постоянным значением $K = \text{const}$ можно записать в виде линейных комбинаций:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 \sigma + x'_0 \tau + \frac{\Delta p}{p} \pi; \\ x'(s) &= x_0 \sigma' + x'_0 \tau' + \frac{\Delta p}{p} \pi'; \\ \frac{\Delta p}{p} &= x_0 \cdot 0 + x'_0 \cdot 0 + \frac{\Delta p}{p} \cdot 1. \end{aligned}$$

* Решение уравнения (2.30) дает значение координаты, зависящее от величины приращения импульса. По аналогии с хроматической aberrацией в оптике, когда положение изображения зависит от частоты света рассматриваемых лучей, такая зависимость $x(s)$ называется хроматической aberrацией.
— Прим. перев.

Для $s = s_1$ эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \sigma_1 + x'_0 \tau_1 + \frac{\Delta p}{\rho} \pi_1; \\x'_1 &= x_0 \sigma'_1 + x'_0 \tau'_1 + \frac{\Delta p}{\rho} \pi'_1; \\\frac{\Delta p}{\rho} &= x_0 \cdot 0 + x'_0 \cdot 0 + \frac{\Delta p}{\rho} \cdot 1.\end{aligned}$$

В матричной форме эти соотношения можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \\ \frac{\Delta p}{\rho} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \frac{\Delta p}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_1 & \pi_1 \\ \sigma'_1 & \tau'_1 & \pi'_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Выпишем матрицы M для отрезка длины $l = (s_1 - s_0)$ в трех случаях:

фокусирующее секторное поле

$$\begin{aligned}K &= \frac{1-n}{\rho^2} > 0; \quad \varphi = \sqrt{K}(s_1 - s_0); \\M = (F) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi & \frac{1}{\rho K} (1 - \cos \varphi) \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi & \frac{1}{\rho \sqrt{K}} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.38)\end{aligned}$$

дефокусирующее секторное поле

$$\left. \begin{aligned}K &= \frac{1-n}{\rho^2} < 0; \quad \psi = \sqrt{-K}(s_1 - s_0); \\M = (D) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh} \psi & \frac{-1}{\rho K} (1 - \operatorname{ch} \psi) \\ \sqrt{-K} \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi & \frac{1}{\rho \sqrt{-K}} \operatorname{sh} \psi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4.39)\end{aligned} \right\}$$

свободный промежуток

$$M = (O) = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Преобразование координат

Преобразование матрицы при изменении системы координат

В этом разделе будет дана интерпретация преобразования

$$y = (A) x \quad (4.40)$$

как перехода* от системы координат (x_1, x_2) к новой системе координат (y_1, y_2) в той же плоскости. Тогда x и y — один и тот же вектор, компоненты которого в этих системах координат соответственно равны x_1, x_2 или y_1, y_2 (рис. 14).

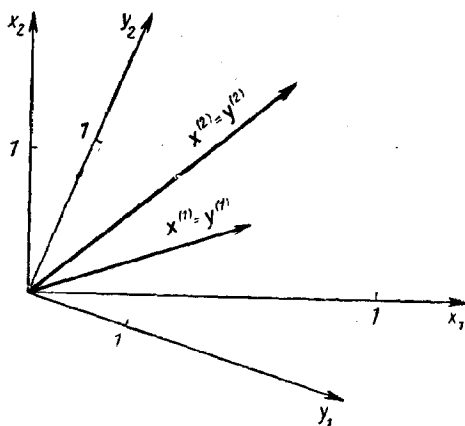


Рис. 14.

Пусть, кроме того, дано матричное соотношение между двумя векторными полями, имеющее в системе координат (x_1, x_2) вид

$$x^{(2)} = (a) x^{(1)}. \quad (4.41)$$

Покажем, что это же соотношение в системе координат (y_1, y_2) запишется в аналогичной форме

$$y^{(2)} = (b) y^{(1)}, \quad (4.42)$$

где

$$(b) = (A) (a) (A)^{-1}. \quad (4.43)$$

Чтобы убедиться в этом, подставим в выражение (4.42) соотношения (4.40) и (4.41):

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= (A) x^{(2)} = (A) (a) x^{(1)} = \\ &= (b) y^{(1)} = (b) (A) x^{(1)}; \\ \frac{(b) (A) = (A) (a)}{(b) (A) = (A) (a)} \\ (b) &= (A) (a) (A)^{-1} \end{aligned}$$

* Преобразование представляет собой поворот или отражение осей; сдвиг и изменение масштаба не рассматриваются. — Прим. перев.

Собственное значение матрицы

Пусть в системе координат (x_1, x_2) дано соотношение (4.41) между векторами $x^{(2)} = (a)x^{(1)}$. Введем посредством равенства (4.40) $y = (A)x$ новую систему координат (y_1, y_2) , в которой соотношение между векторами (4.41) записывается в виде $y^{(2)} = (b)y^{(1)}$. Покажем, что среди всех возможных систем координат y существует такая, в которой матрица (b) диагональна

$$(b) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} y_1^{(2)} &= m_1 y_1^{(1)}; \\ y_2^{(2)} &= m_2 y_2^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Доказательство. Поскольку $(b) = (A)(a)(A)^{-1}$, то требуется показать, что существует такая матрица (A) , которая делает матрицу (b) диагональной

$$(b) = (A)(a)(A)^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство является краткой записью следующих четырех уравнений:

$$A_{11}(a_{11} - m_1) + A_{12}a_{21} = 0;$$

$$A_{11}a_{12} + A_{12}(a_{22} - m_1) = 0;$$

$$A_{21}(a_{11} - m_2) + A_{22}a_{21} = 0;$$

$$A_{21}a_{12} + A_{22}(a_{22} - m_2) = 0.$$

Считаем A_{11} и A_{12} неизвестными в первой паре уравнений, а A_{21} и A_{22} — неизвестными во второй паре. Эти системы уравнений имеют нетривиальные решения, если выполнено условие совместности уравнений для каждой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - m_i & a_{21} \\ a_{12} & (a_{22} - m_i) \end{vmatrix} = \|(a) - m_i(1)\| = 0. \quad (4.46)$$

Раскрывая этот определитель*, получим

$$m_i^2 - \text{Sp}(a)m_i + \text{dét}(a) = 0, \quad (4.47)$$

откуда

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\text{Sp}(a) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\text{Sp}(a)\right]^2 - \text{dét}(a)}, \quad (4.48)$$

* Символ (1) — единичная матрица. — *Прим. ред.*

где

$$\text{Sp}(a) = (a_{11} + a_{22}); \quad \text{dét}(a) = \|a\| = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}).$$

Таким образом, мы не только показали, что любое соотношение между векторными полями типа $x^{(2)} = (a)x^{(1)}$ в некоторой новой системе координат (y_1, y_2) может быть представлено в виде

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} y^{(1)},$$

но в то же время получили выражения (4.48) для коэффициентов m_1 и m_2 .

Каждое из уравнений (4.46) — (4.48) называется *уравнением для собственных значений* m_1 и m_2 .

Инвариантность собственных значений следа и определителя по отношению к преобразованию матрицы

Пусть дана матрица (a) . Было показано, что в результате преобразования этой матрицы может быть получена диагональная матрица

$$(b) = (A)(a)(A)^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы m_1 и m_2 являются собственными значениями матрицы (a) .

Пусть матрица

$$(c) = (C)(a)(C)^{-1} \tag{4.49}$$

тоже получена в результате преобразования матрицы (a) .

Докажем, что матрицы (c) и (a) имеют одни и те же собственные значения, которые являются корнями уравнения (4.46) для собственных значений $\|(c) - m_i'(1)\| = 0$. Для этого следует показать инвариантность левой части уравнения для собственных значений по отношению к преобразованию (4.49), т. е.

$$\|(c) - m_i'(1)\| \equiv \|(a) - m_i'(1)\|. \tag{4.50}$$

Подставляя в определитель $\|(c) - m_i'(1)\|$ соотношение (4.49) и соотношение $(C)(1)(C)^{-1} = (1)$, которое выражает, что единичная матрица является единичной в любой системе отсчета, получаем

$$\begin{aligned} J = \|(c) - m_i'(1)\| &= \|(C)(a)(C)^{-1} - m_i'(C)(1)(C)^{-1}\| = \\ &= \|(C)[(a) - m_i'(1)](C)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей, то последнее выражение примет вид

$$J = \|C\| \cdot \|(a) - m_i'(1)\| \cdot \|C^{-1}\|.$$

Используя свойство переместительности сомножителей и равенство $\|C\| \cdot \|C^{-1}\| = 1$, получаем $J = |(a) - m'_i(1)|$. Из уравнения

$$\|(c) - m'_i(1)\| \equiv \|(a) - m'_i(1)\| = 0$$

следует равенство собственных значений матриц (a) и (c) , а также равенство их определителей и следов:

$$\det(c) = \det(a); \quad (4.51)$$

$$\text{Sp}(c) = \text{Sp}(a). \quad (4.52)$$

Более того, поскольку определитель и след инвариантны по отношению к преобразованию системы координат, то можно выразить их через элементы диагональной матрицы, т. е. через собственные значения:

$$\det(c) = \det(a) = m_1 m_2; \quad (4.53)$$

$$\text{Sp}(c) = \text{Sp}(a) = m_1 + m_2. \quad (4.54)$$

Глава 5

УРАВНЕНИЕ ХИЛЛА, ТЕОРЕМА ФЛОКЕ

Уравнение Хилла является уравнением с периодическими коэффициентами несколько более общего вида, чем в уравнении Матье, [см. уравнение (10.13)], и имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{ds^2} + K(s) y &= 0; \\ K(s+L) &= K(s), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где L — период изменения коэффициента $K(s)$.

Уравнение этого типа, рассмотренное астрономом Хиллом в связи с изучением движения Луны, описывает также траекторию частиц в циклических ускорителях. Для ускорителя со знакопеременным градиентом*

$$K = \frac{n(s)}{\rho^2}, \quad (5.2)$$

где n принимает последовательно значения $n = +|n|, 0, -|n|, \dots$

Теорема Флоке устанавливает, что уравнение Хилла обладает всегда двумя независимыми частными решениями вида

$$y_1 = e^{+i\mu \frac{s}{L}} p_1(s); \quad y_2 = e^{-i\mu \frac{s}{L}} p_2(s), \quad (5.3)$$

* Это равенство является точным только для вертикальных колебаний (см. гл. 6). — Прим. ред.

где $p_1(s)$ и $p_2(s)$ — периодические функции с периодом L :

$$p_{1,2}(s+L) = p_{1,2}(s), \quad (5.3a)$$

μ — характеристический коэффициент уравнения, удовлетворяющий соотношению

$$\cos \mu = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}) = \frac{1}{2} \text{Sp } M(s|s+L) \quad (5.4)$$

(M — матрица перехода для периода L). След M не зависит от выбора начала отсчета s области перехода

$$\text{Sp } M \neq f(s). \quad (5.5)$$

Решения (5.3) ограничены для реальных μ :

$$-1 < \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}) < +1. \quad (5.6)$$

В противном случае решение неограниченно возрастает.

Покажем справедливость следующего утверждения: уравнение Хилла (5.1) обладает всегда двумя частными решениями $y_1(s)$ и $y_2(s)$, удовлетворяющими для произвольного значения переменной s соотношениям

$$\left. \begin{aligned} y_1(s+L) &= m_1 y_1(s); \\ y_2(s+L) &= m_2 y_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где m_1 и m_2 — постоянные величины.

Пусть $g_1(s)$ и $g_2(s)$ — независимые частные решения уравнения Хилла. Функции $g_1(s+L)$ и $g_2(s+L)$ также являются решениями уравнения Хилла в силу периодичности коэффициента $K(s+L) = K(s)$. Поэтому $g_1(s+L)$ и $g_2(s+L)$ могут быть линейно выражены через $g_1(s)$ и $g_2(s)$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_{s+L} = (a) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_s. \quad (5.8)$$

Заметим, что матрица (a) не является матрицей перехода, и связь ее с матрицей перехода будет рассмотрена ниже.

Введем теперь новые функции $y_1(s)$ и $y_2(s)$, также являющиеся независимыми частными решениями уравнения Хилла. Новые функции могут быть выражены через прежние решения $g_1(s)$ и $g_2(s)$ в форме

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_s = (A) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_s. \quad (5.9)$$

Кроме того, для решений $y_{1,2}(s+L)$ и $y_{1,2}(s)$ существует соотношение, аналогичное (5.8):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{s+L} = (b) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_s. \quad (5.10)$$

Подставляя соотношения (5.8) и (5.9) в соотношение (5.10), получаем, что

$$(b) = (A) (a) (A)^{-1}. \quad (5.11)$$

Таким образом, утверждение о существовании двух решений y_1 и y_2 , удовлетворяющих соотношению (5.7), сводится к предположению о существовании такого преобразования (A) , которое делает матрицу (b) диагональной:

$$(b) = (A) (a) (A)^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

При рассмотрении основ матричного исчисления было показано, что такое преобразование (A) существует [см. формулы (4.44) — (4.48)]. Оно приводит матрицу (a) к главным осям, и коэффициенты m_1 и m_2 получаются как корни уравнения для собственных значений:

$$|(a) - m_i(1)| = 0; \quad i = 1, 2,$$

где корни равны

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp}(a) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \text{Sp}(a)\right]^2 - \text{dét}(a)}.$$

Коэффициенты m_1 и m_2 называются собственными значениями уравнения Хилла, а $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — собственными функциями этого уравнения.

Собственные значения m_1 и m_2 выражаются через элементы матрицы (a) , которая в свою очередь определяется двумя произвольными решениями $g_1(s)$ и $g_2(s)$ уравнения Хилла. Покажем, что собственные значения m_1 и m_2 не зависят от выбора фундаментальной системы решений $g_1(s)$ и $g_2(s)$. Пусть $h_1(s)$ и $h_2(s)$ — другая пара частных решений уравнения Хилла.

В силу периодичности коэффициента K в уравнении Хилла имеем вновь соотношение вида

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}_{s+L} = (c) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}_s. \quad (5.13)$$

Покажем, что матрица (c) получается в результате преобразования матрицы (a) . Так как функции h_1, h_2, g_1, g_2 — решения одного и того же уравнения Хилла, между ними существует линейная зависимость

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (\kappa) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Подставляя эту зависимость в предыдущую формулу, получим

$$\begin{aligned} (\kappa) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_{s+L} &= (c) (\kappa) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_s; \\ \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_{s+L} &= (\kappa)^{-1} (c) (\kappa) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_s. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее соотношение с соотношением (5.8), находим

$$(\kappa)^{-1} (c) (\kappa) = (a); \quad (5.15)$$

таким образом, действительно матрица (c) получается в результате преобразования матрицы (a) и собственные значения матриц совпадают [см. раздел 4.3].

Соотношение (5.8) и такое же соотношение для производных g'_1 и g'_2

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_{s+L} &= (a) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}_s; \\ \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix}_{s+L} &= (a) \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \end{pmatrix}_s \end{aligned}$$

можно кратко записать в одном матричном уравнении

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{pmatrix}_{s+L} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{pmatrix}_s \cdot (a)^T, \quad (5.16)$$

где

$$(a)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

называется матрицей транспонированной по отношению к матрице (a) . Определители и следы матрицы (a) и транспонированной $(a)^T$ одинаковы:

$$\| (a)^T \| = \| a \|; \quad (5.18)$$

$$\text{Sp} (a)^T = \text{Sp} (a). \quad (5.19)$$

С другой стороны, на основании определения матрицы перехода [см. формулу (4.19)] имеем два уравнения

$$\begin{pmatrix} g_i \\ g'_i \end{pmatrix}_{s+L} = M(s+L|s) \begin{pmatrix} g_i \\ g'_i \end{pmatrix}_s \quad i = 1, 2,$$

которые можно кратко записать в виде одного:

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{pmatrix}_{s+L} = M(s+L|s) \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g'_1 & g'_2 \end{pmatrix}_s, \quad (5.20)$$

где $M(s+L|s)$ есть матрица периода L .

Сравнивая соотношения (5.16) и (5.20), получаем

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix}_s (a)^T = M \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix}_s, \quad (5.21)$$

$$(a)^T = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix}_s^{-1} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix}_s.$$

Таким образом, матрица $(a)^T$ получается в результате преобразования матрицы M , поэтому обе матрицы имеют один и тот же определитель и один и тот же след [см. выражения (4.53) и (4.54)]. Учитывая, кроме того, соотношения (5.18) и (5.19), имеем окончательно

$$\text{Sp } (a) = \text{Sp } M. \quad (5.22)$$

С другой стороны, в силу уравнения (6.16)

$$\left. \begin{aligned} \|a\| &= \|M\|; \\ \|M\| &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Собственные значения

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp } (a) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \text{Sp } (a)\right]^2 - \text{dét } (a)}$$

запишем в виде

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \text{Sp } M \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{Sp } M\right)^2 - 1}, \quad (5.24)$$

откуда вытекают следующие соотношения между двумя собственными значениями [их также можно вывести из соотношения (5.23)]:

$$m_1 m_2 = 1; \quad (5.25)$$

$$m_1 + m_2 = \text{Sp } M = m_{11} + m_{22} = (\sigma + \tau')_{(s+L|s)},$$

где σ и τ — некоторые частные решения уравнения Хилла, определенные условиями (4.18).

Напомним, что эти собственные значения относятся к интервалу L периодичности коэффициента K уравнения Хилла, но они не зависят от выбора начала s отрезка [см. уравнение (5.7)], поэтому и след не зависит от начала отсчета:

$$m_1 + m_2 = (m_{11} + m_{22}) = (\sigma + \tau')_{(s+L|s)} = f(s). \quad (5.26)$$

Вводим обозначение

$$m_1 = \exp(+i\mu). \quad (5.27a)$$

Чтобы удовлетворить соотношениям (5.25), получаем

$$m_2 = \exp(-i\mu), \quad (5.27b)$$

откуда

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) = \frac{\exp i\mu + \exp(-i\mu)}{2} = \cos \mu = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}). \quad (5.28)$$

Тогда утверждение (5.7) принимает следующую форму: уравнение Хилла имеет всегда два независимых частных решения $y_1(s)$ и $y_2(s)$, обладающих свойством

$$\left. \begin{aligned} y_1(s+L) &= y_1(s) \cdot \exp(+i\mu); \\ y_2(s+L) &= y_2(s) \cdot \exp(-i\mu), \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

где $\cos \mu = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22})$ — характеристический коэффициент уравнения Хилла.

Перейдем теперь к доказательству теоремы Флоке: два частных решения уравнения Хилла, обладающие свойством (5.29), обязательно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} y_1(s) &= \exp\left(i\mu \frac{s}{L}\right) p_1(s); \\ y_2(s) &= \exp\left(-i\mu \frac{s}{L}\right) p_2(s), \end{aligned} \right\} \quad (5.30a)$$

где функции $p_1(s)$ и $p_2(s)$ — периодические функции с периодом $\Delta s = L$, равным периоду коэффициента $K(s)$ в уравнении Хилла:

$$p_1(s+L) = p_1(s); \quad p_2(s+L) = p_2(s). \quad (5.30b)$$

Доказательство. Любые функции можно представить в виде (5.30a), если допустить, что $p_1(s)$ и $p_2(s)$ — произвольные функции, на которые не наложено условие (5.30 б).

Итак, запишем $y_1(s)$ и $y_2(s)$ в этом виде и подставим их в соотношение (5.29). Например, для первого из этих соотношений получаем

$$\begin{aligned} y_1(s+L) &= \exp\left(+i\mu \frac{s+L}{L}\right) p_1(s+L) = \\ &= \exp\left(+i\mu \frac{s}{L}\right) \exp(i\mu) p_1(s+L) = y_1(s) \exp(i\mu) = \\ &= \exp\left(i\mu \frac{s}{L}\right) p_1(s) \exp(i\mu), \end{aligned}$$

откуда $p_1(s+L) = p_1(s)$.

Аналогичное решение имеем и для $p_2(s)$. Таким образом, $p_1(s)$ и $p_2(s)$ — периодические функции в соответствии с уравнением (5.30б).

Глава 6

НАБЕГ ФАЗЫ, ЧИСЛО БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ДИАГРАММА УСТОЙЧИВОСТИ

6.1. Определения

Магнитное поле циклического ускорителя состоит из N одинаковых секторов (периодов).

Фаза бетатронных колебаний возрастает внутри каждой секции на угол μ , который является характеристическим коэффициентом уравнения Хилла, описывающего эти колебания. По принятой терминологии коэффициент μ называется *набегом фазы* бетатронных колебаний на периоде. Число бетатронных колебаний за один оборот частицы

$$\nu = \frac{\mu N}{2\pi}. \quad (6.1)$$

В этой главе будут вычислены набег фазы μ , число колебаний и пределы устойчивости Флоке для некоторых конкретных структур магнитного периода. Эти характеристики получаются из рассмотрения выражения [см. уравнение (5.28)] $\cos \mu = 1/2(m_{11} + m_{22})$, содержащего след матрицы перехода для соответствующего сектора. Рассмотренные здесь участки состоят из участков с фокусирующим или дефокусирующим секторным магнитным полем, каждый из которых характеризуется постоянным градиентом (показателем поля). Кроме того, могут быть участки без поля. Матрицы перехода F , D и O на этих отдельных участках были получены раньше [см. формулы (4.21) — (4.23)].

6.2. Синхротрон со слабой фокусировкой

Матрица перехода, $\cos \mu$ и условия устойчивости. Рассматриваемые секторы состоят обычно из прямолинейного участка и фокусирующего в каждой из плоскостей x и z участка. Матрица перехода для такой структуры определяется согласно соотношению (4.25) в обеих плоскостях x и z как

$$M_{x,z} = OF = \begin{pmatrix} \cos \varphi - l\sqrt{K} \sin \varphi & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \varphi + l \cos \varphi \\ -\sqrt{K} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{1-n}{\rho^2}; & K_z &= \frac{n}{\rho^2}; \\ \varphi &= \sqrt{K} \Delta s; \\ \Delta s &= \frac{2\pi\rho}{N}; \\ \varphi_x &= \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}; \\ \varphi_z &= \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}; \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

l — длина прямолинейного участка.

Согласно уравнению (5.28),

$$\cos \mu = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22}) = \cos \varphi - \frac{1}{2} l \sqrt{K} \sin \varphi. \quad (6.3)$$

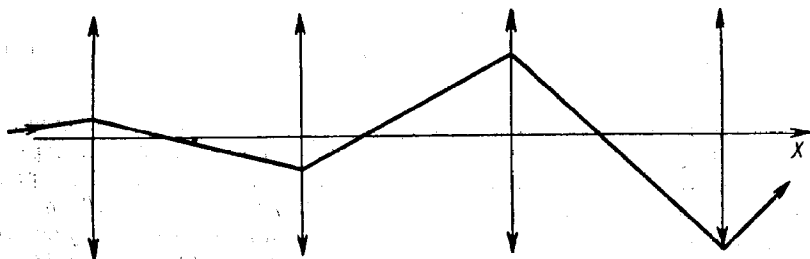


Рис. 15.

Условие устойчивости получим из требования реальности μ :

$$-1 < \cos \mu < +1,$$

откуда

$$-1 < \cos \varphi - \frac{1}{2} l \sqrt{K} \sin \varphi < +1.$$

Это условие выполняется, если: а) K — положительно, т. е. при условии (2.35) $0 < n < 1$;

$$\text{б) } \frac{2(\cos \varphi - 1)}{\sqrt{K} \sin \varphi} < l < \frac{2(1 + \cos \varphi)}{\sqrt{K} \sin \varphi}, \text{ т. е. } \sin \varphi > 0.$$

Слева — величина отрицательная и первое неравенство выполняется заведомо; нетривиально условие

$$l < \frac{2(1 + \cos \varphi)}{\sqrt{K} \sin \varphi}. \quad (6.4)$$

Оно выражает тот известный факт, что при прохождении пучка через последовательность собирающих линз, имеющих одну оптическую ось, отклонение пучка от оси увеличивается, если эти линзы расположены на достаточно большом расстоянии одна от другой, большем, чем учетверенное фокусное расстояние (рис. 15).

Приближенные выражения для μ и ν

Напомним, что при $\varepsilon \ll 1$

$$\cos(\alpha + \varepsilon) = \cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon \simeq \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha.$$

Также можно записать, что $\cos \mu = \cos \varphi - \frac{1}{2} l \sqrt{K} \sin \varphi \simeq \cos \left(\varphi + \frac{1}{2} l \sqrt{K} \right)$, если $\frac{1}{2} l \sqrt{K} \ll 1$. Из этого следует: $\mu \simeq \varphi + \frac{1}{2} l \sqrt{K} \simeq \varphi \sqrt{1 + \frac{l \sqrt{K}}{\varphi}}$. Согласно уравнениям (6.2), имеем $\frac{\sqrt{K}}{\varphi} = \frac{N}{2\pi\rho}$.

Определим средний радиус ускорителя R , исходя из длины его окружности C

$$2\pi R = C_z = 2\pi\rho + Nl, \quad (6.5)$$

и введем относительно длину свободных промежутков k :

$$1 + k = \frac{R}{\rho} = 1 + \frac{lN}{2\pi\rho} = 1 + \frac{l\sqrt{K}}{\varphi}. \quad (6.6)$$

Таким образом, $\mu \simeq \varphi \sqrt{1+k}$; $\nu = \frac{\mu N}{2\pi} \simeq \frac{N\varphi}{2\pi} \sqrt{1+k}$ или, учитывая выражения (6.2) для φ_x и φ_z ,

$$\left. \begin{aligned} \nu_x &= \sqrt{(1-n)(1+k)}; \\ \nu_z &= \sqrt{n(1+k)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Например, для синхротрона «Сатурн» рассмотренные величины имеют следующие значения: $n = 0,6$; $\nu_x = 0,72$; $\nu_z = 0,88$; $1 + k = 1,30$.

Число бетатронных колебаний, определенное для «Сатурна» по приближенной формуле (6.7), отличается лишь на несколько тысячных от точного значения, найденного по уравнению (6.3).

6.3. Фокусировка знакопеременным градиентом и структура FD

Принцип сильной фокусировки. Для случая, когда поле характеризуется постоянным по азимуту градиентом (слабая фокусировка), имеем, принимая во внимание выражения (6.7),

$$\nu_x^2 + \nu_z^2 = 1 + k. \quad (6.8)$$

Возрастание одного из двух чисел бета-тронных колебаний приводит к уменьшению другого. Ни одно из них не может выходить из пределов

$$0 \leq v^2 < (1 + k), \quad (6.9)$$

где $k \simeq 1$. С другой стороны, чередуя попеременно фокусирующий сектор с дефокусирующим, можно получить сразу для обоих чисел v_x и v_z очень высокие значения. Это открытие было сделано Кристофилосом (1950 г.) и независимо Курантом, Снайдером и Ливингстоном (1952 г.) и носит название фокусировки с помощью знакопеременного градиента, или сильной фокусировки. Принцип фокусировки знакопеременным градиентом основан на том, что оптическая сила $1/f_0$ системы двух линз, одна из которых собирающая, а другая — рассеивающая, является величиной положительной. Для двух линз, расположенных на расстоянии Δ друг от друга и имеющих равные по абсолютной величине оптические силы

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f},$$

оптическая сила системы

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{\Delta}{f^2},$$

т. е. всегда положительна, и, следовательно, такая система двух линз собирающая.

Принцип сильной фокусировки дает возможность использовать системы с очень большой оптической силой, причем фокусировка в такой системе происходит поочередно в обеих плоскостях x и z , так как структура FD в плоскости x соответствует структуре DF в плоскости z .

Физический смысл того, что система двух линз, одна из которых собирающая, а другая рассеивающая, имеет положительную оптическую силу, состоит в том, что луч, проходя через эту систему, пересекает собирающую линзу на большем расстоянии от оптической оси, чем рассеивающую линзу, и действие фокусирующей линзы сказывается сильнее, чем действие рассеивающей, поскольку отклонение луча пропорционально его расстоянию от оптической оси (рис. 16).

$\cos \mu$ для структуры FD . Рассмотрим последовательность магнитных периодов FD , изображенную на рис. 17. Пусть показатель

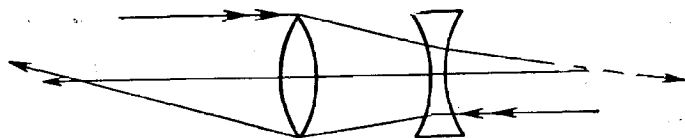


Рис. 16.

поля принимает попеременно значения $n = n_1 > 0$ и $n = -n_2 < 0$. Напомним, что [см. формулу (1.21)]

$$n = -\frac{\rho}{B_0} \cdot \frac{dB}{dx}.$$

Предположим, что $n_1 \neq n_2$; $n_1, n_2 \gg 1$; $n_1 - 1 \simeq n_1$; $-n_2 - 1 \simeq -n_2$. Приведем удобную для справок табл. 3.

Таблица 3
Фокусирующие свойства секторов магнита

Сектор	n	Зазор магнита открыт	Оптическая сила в плоскости	
			x	z
1	$n_1 \gg 1$	Наружу	D	F
2	$-n_2 \ll -1$	К центру	F	D

Пусть $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s = \pi\rho/N$; $\Delta s_1 + \Delta s_2 = 2\Delta s = L$ — длина одного периода.

Матрица перехода M_x . В соответствии с формулами (4.22) и (4.23) имеем

$$\varphi_x = \frac{\pi \sqrt{n_2}}{N}; \quad \psi_x = \frac{\pi \sqrt{n_1}}{N}.$$

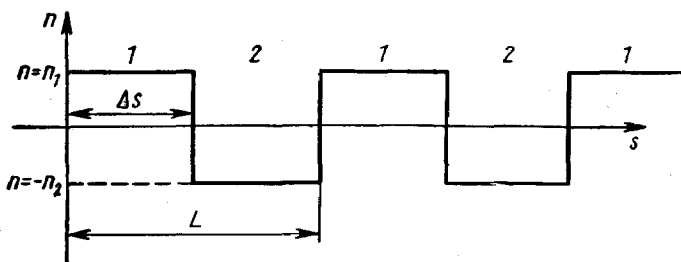


Рис. 17.

Матрицу перехода найдем по формулам (4.22) и (4.23):

$$M_x = M_x^{(2)} M_x^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \frac{\rho}{\sqrt{n_2}} \sin \varphi_x \\ -\frac{\sqrt{n_2}}{\rho} \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi_x & \frac{\rho}{\sqrt{n_1}} \operatorname{sh} \psi_x \\ +\frac{\sqrt{n_1}}{\rho} \operatorname{sh} \psi_x & \operatorname{ch} \psi_x \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение, получим следующие выражения элементов матрицы M_x :

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \cos \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x + \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sin \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x; \\ m_{12} &= \frac{\rho}{\sqrt{n_1}} \cos \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x + \frac{\rho}{\sqrt{n_2}} \sin \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x; \\ m_{21} &= -\frac{\sqrt{n_2}}{\rho} \sin \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x + \frac{\sqrt{n_1}}{\rho} \cos \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x; \\ m_{22} &= -\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \sin \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x + \cos \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Находя след матрицы, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22})_x &= \cos \mu_x = \cos \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x - \\ &- \frac{1}{2} \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{n_1 n_2}} \sin \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x = \cos \varphi_x \operatorname{ch} \psi_x + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_x}{\varphi_x} - \frac{\varphi_x}{\psi_x} \right) \sin \varphi_x \operatorname{sh} \psi_x. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Матрица перехода M_z . В этом случае

$$\varphi_z = \frac{\pi \sqrt{n_1}}{n}; \quad \psi_z = \frac{\pi \sqrt{n_2}}{N}$$

и аналогичным образом получаем

$$\cos \mu_z = \cos \varphi_z \operatorname{ch} \psi_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_z}{\varphi_z} - \frac{\varphi_z}{\psi_z} \right) \sin \varphi_z \operatorname{sh} \psi_z. \quad (6.12)$$

Диаграмма («галстук») устойчивости. Заметим, что μ_x и μ_z выражаются только через φ и ψ , т. е. являются функциями только двух аргументов: n_1/N^2 и n_2/N^2 . На рис. 18 представлена сетка линий $\mu_x = \text{const}$ и $\mu_z = \text{const}$ для этих функций двух переменных.

Область устойчивости, определяемая условиями $1 > \cos \mu > -1$, $0 < \mu < \pi$, иногда называется благодаря своей форме «галстуком» устойчивости. Вне этой области приведенное выше неравенство не выполняется, μ принимает комплексное значение и экспоненциальный множитель, входящий в выражение траектории (5.30а), имеет вид

$$\exp i \mu \frac{s}{L} = \exp \left[(a + i b) \frac{s}{L} \right],$$

т. е. траектория частицы становится осциллирующей с возрастающей амплитудой, подобно той, которая показана на рис. 15. Однако для некоторых значений n_1/N^2 и n_2/N^2 имеются вторичные зоны устойчивости, расположенные на некотором расстоянии от «галстука».

Приближенные выражения для μ и ν . Если принять $n_1 = -n_2 = n$, то имеем $\mu_x = \mu_z = \mu$; $\cos \mu = \cos \varphi \operatorname{ch} \psi = \cos \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right) \times \operatorname{ch} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)$.

Разложим обе части этого равенства в ряд:

$$1 - \frac{1}{2} \mu^2 + \dots = \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)^4 - + \dots \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2!} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)^4 + \dots \right] = \\ = \left[1 - \frac{1}{6} \left(\pi \frac{\sqrt{n}}{N} \right)^4 + \dots \right],$$

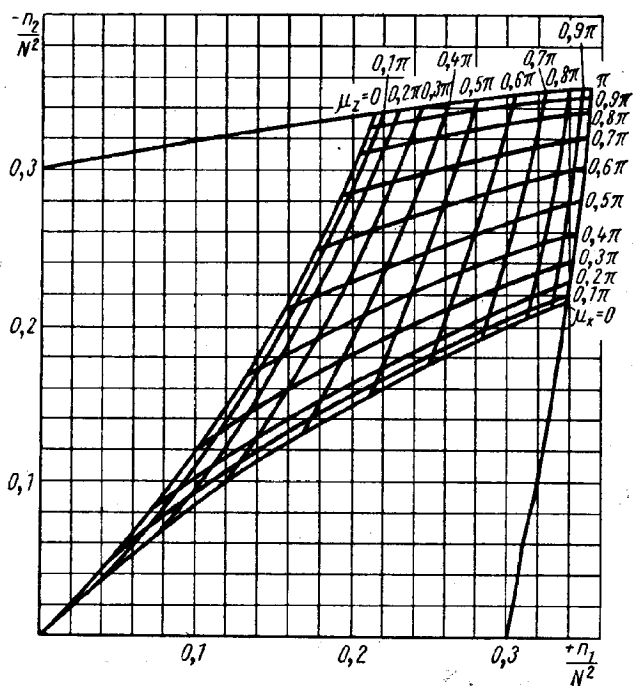


Рис. 18.

откуда находим

$$\left. \begin{aligned} \mu &\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \pi^2 \frac{n}{N^2}; \\ \nu &= \frac{\mu N}{2\pi} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{n}{N}. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

6.4. Структуры *FOD*, *FODO* и *FOFDOD*

Предположим, что участки с секторным магнитным полем имеют равные длины $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$. Свободные промежутки (участки без поля) могут иметь другие длины, но одинаковые. Показатель спада поля попеременно равен n_1 или n_2 , где $n_1 = -n_2 = n \gg 1$. Пусть N — число магнитных периодов, $k = R/\rho - 1$ — относительная длина свободных промежутков, тогда

$$\varphi = \frac{\pi \sqrt{n}}{N}.$$

Ниже приведены выражения $\cos \mu$ и приближенные значения μ , полученные в результате разложения в ряд и отличающиеся лишь на несколько процентов от точных значений μ (если $\mu \leq \pi/3$; $1 + k \leq 2$; $\varphi \leq 1,8$) для нескольких структур магнитного периода.

Структура *FOD*:

$$\cos \mu = \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi + k\varphi (\cos \varphi \operatorname{sh} \varphi - \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi); \quad (6.14)$$

$$\mu \simeq \varphi^2 \sqrt{\frac{1+4k}{2}}. \quad (6.15)$$

Структура *FODO*:

$$\cos \mu = \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi + k\varphi (\cos \varphi \operatorname{sh} \varphi - \sin \varphi \operatorname{ch} \varphi) - \frac{k^2 \theta^2}{2} \sin \varphi \operatorname{sh} \varphi; \quad (6.16)$$

$$\mu \simeq \varphi^2 \sqrt{\frac{1+4k+3k^2}{3}}. \quad (6.17)$$

Структура *FOFDOD*:

$$\begin{aligned} \cos \mu = \cos \varphi \operatorname{ch} \varphi + \frac{k\varphi}{2} [(1 + \cos \varphi) \operatorname{sh} \varphi - \sin \varphi (1 + \operatorname{ch} \varphi)] + \\ + \frac{k^2 \theta^2}{4} [\operatorname{ch} \varphi - \cos \varphi - \sin \varphi \operatorname{sh} \varphi]; \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\mu \simeq \varphi^2 \sqrt{\frac{1+k}{3}}. \quad (6.19)$$

Приближенная формула (6.19) также применима для структуры *FOFODODO*.

Численный пример для синхротрона ЦЕРН. Магнитное поле протонного синхротрона на энергию 28 Гэв в ЦЕРНе имеет структуру *FOFDOD* и характеризуется следующими параметрами: $n = 288$; $N = 50$; $1 + k = 1,41$; $\theta = 1,08$. Им соответствуют найденный по формуле (6.19) набег фазы $\mu = 0,249\pi$ и число бетатронных колебаний $\nu_x = \nu_z = \mu N / 2\pi \simeq 6,2$. Точная формула (6.18) дает значение $\nu = 6,25$.

Глава 7

МАТРИЦА ТВИССА

Определение матрицы Твисса. Правило умножения. Четыре элемента m_{ik} матрицы перехода можно выразить через величины α , β , γ и μ , которые имеют определенный физический смысл. Согласно уравнениям (5.29) имеем

$$m_{11} + m_{22} = 2\cos \mu. \quad (7.1)$$

Кроме того, определим еще три величины α , β , γ уравнениями:

$$m_{11} - m_{22} = 2\alpha \sin \mu; \quad (7.2)$$

$$m_{12} = \beta \sin \mu; \quad (7.3)$$

$$m_{21} = -\gamma \sin \mu. \quad (7.4)$$

Напомним, что μ не зависит от s [см. уравнение (5.26)]

$$\mu \neq f(s),$$

в то время как величины $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$ и $\gamma = \gamma(s)$ являются периодическими функциями s с периодом L , подобно элементам матрицы m_{ik} . В частности,

$$\beta(s + L) = \beta(s). \quad (7.5)$$

С учетом соотношений (7.1)—(7.4) матрица перехода принимает форму, указанную Твиссом:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Определитель этой матрицы $\|M\| = \cos^2 \mu + (\beta\gamma - \alpha^2) \sin^2 \mu$. С другой стороны, известно [см. соотношения (5.23)], что $\|M\| = 1$. Отсюда получаем, что

$$\left. \begin{aligned} \beta\gamma - \alpha^2 &= 1; \\ \gamma &= \frac{1 + \alpha^2}{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Можно разложить матрицу M на две матрицы:

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu,$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица и

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Принимая во внимание уравнение (7.7), находим

$$J^2 = -I. \quad (7.9)$$

Учитывая соотношения (7.8) и (7.9), легко получить правило умножения одинаковых матриц M , аналогичное формуле Муавра

$$M^2 = J(\cos^2 \mu - \sin^2 \mu) + 2J \cos \mu \sin \mu = I \cos 2\mu + J \sin 2\mu.$$

Соответственно

$$M^k = I \cos k\mu + J \sin k\mu. \quad (7.10)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка для собственной функции уравнения Хилла.

Любое решение $y(s)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка удовлетворяет в общем случае соотношению

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s+L} = M \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s,$$

где M — матрица перехода. Отсюда для $y = (s+L)$ выводим

$$y_{s+L} = m_{11} y_s + m_{12} y'_s.$$

В случае уравнения Хилла с периодическими коэффициентами с периодом L , выражая матрицу перехода M в форме Твисса (7.6), получим

$$y_{s+L} = y_s \cos \mu + (y_s \alpha + y'_s \beta) \sin \mu. \quad (7.11)$$

Согласно уравнениям (5.29), собственные функции уравнения Хилла удовлетворяют соотношению

$$y_{s+L} = y_s e^{\pm i\mu} = y_s (\cos \mu \pm i \sin \mu). \quad (7.12)$$

Сравнивая соотношения (7.11) и (7.12), приходим к выводу, что собственные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$y\alpha + y'\beta = \pm i y; \quad \frac{y'}{y} = \frac{\pm i - \alpha}{\beta}. \quad (7.13)$$

Последнее соотношение можно упростить и проинтегрировать.

Соотношение между коэффициентами α и β

Логарифмическая производная от выражения (7.13) равна

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y}{y'} = \frac{-\alpha'}{\pm i - \alpha} - \frac{\beta'}{\beta}. \quad (7.14)$$

С другой стороны, из уравнения Хилла имеем $y'' = -Ky$ и, учитывая соотношение (7.13), получаем

$$\frac{y''}{y'} = -K \frac{y}{y'} = -\frac{K\beta}{\pm i - \alpha}; \quad \frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = -\frac{K\beta}{\pm i - \alpha} - \frac{\pm i - \alpha}{\beta}. \quad (7.15)$$

Приравняем правые части уравнений (7.14) и (7.15):

$$-\alpha' \beta - \beta' (\pm i - \alpha) = -K\beta^2 - (\pm i - \alpha)^2.$$

Раскрывая скобки и объединяя члены с i , найдем

$$(\alpha^2 + K\beta^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - 1) \mp i(2\alpha + \beta') = 0. \quad (7.16)$$

Напомним, что коэффициенты m_{ik} матрицы перехода являются действительными величинами. То же самое можно сказать относительно $\cos \mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$ и $\sin \mu$, если решения ограничены. В основном представляет интерес именно последний случай, для которого коэффициенты α , β и γ матрицы Твисса (7.6) также являются действительными.

Полагая равными нулю отдельно действительную и мнимую части в (7.16), получим два соотношения

$$\beta' = -2\alpha; \quad (7.17a)$$

$$\alpha' = K\beta - \frac{1 + \alpha^2}{\beta}. \quad (7.17b)$$

С помощью соотношений (7.7) и (7.17a) можно выразить матрицу Твисса (7.6) в виде

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu - \frac{1}{2} \beta' \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1 + \beta'^2/4}{\beta} \sin \mu & \cos \mu + \frac{1}{2} \beta' \sin \mu \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

т. е. только через набег фазы μ и функцию $\beta(s)$.

Напомним [см. соотношения (5.26) и (7.3)], что

$$\cos \mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) = \frac{1}{2}(\sigma + \tau')_{(s+L|s)};$$

$$\beta(s) = \frac{m_{12}}{\sin \mu} = \frac{\tau(s+L|s)}{\sin \mu}.$$

Дифференциальное уравнение для коэффициента β

Исключая α и α' из соотношения (7.17b), получим дифференциальное уравнение для коэффициента β :

$$\frac{1}{2} \beta\beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + K\beta^2 = 1. \quad (7.19)$$

Бетатронные колебания и псевдогармонические функции

Исключая α из соотношения (7.13) с помощью соотношения (7.17a), получим для собственных функций уравнения Хилла следующее уравнение:

$$y' = \frac{\pm i + \beta'/2}{\beta} y, \quad (7.20)$$

решение которого имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y_{1,2} &= a\beta^{1/2}(s) \exp[\pm i\Psi(s)]; \\ \Psi(s) &= \int \frac{ds}{\beta(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Выражения (7.21) для собственных функций уравнения Хилла, естественно, идентичны выражениям (5.30) теоремы Флоке с той лишь разницей, что $y_{1,2}$ здесь определены полностью (с точностью до произвольной постоянной a). Складывая или вычитая собственные решения (7.21), получим два действительных решения уравнения Хилла:

$$\left. \begin{aligned} y &= \text{const } \beta^{1/2}(s) \cos \int \frac{ds}{\beta(s)}; \\ y &= \text{const } \beta^{1/2}(s) \sin \int \frac{ds}{\beta(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

откуда очевиден физический смысл коэффициента β .

Выражения (7.22) описывают псевдогармонические колебания с мгновенной амплитудой

$$\hat{A} \sim \beta^{1/2}(s) \quad (7.23)$$

и мгновенной длиной волны λ , деленной на 2π ,

$$\frac{\lambda(s)}{2\pi} = \lambda(s) = \beta(s). \quad (7.24)$$

Средняя длина волны, деленная на 2π , соответственно равна

$$\bar{\lambda}(s) = \bar{\beta} = R/\nu. \quad (7.25)$$

Выражение набега фазы μ и числа колебаний ν через коэффициент Твисса β

Согласно выражению (7.21), собственные решения уравнения Хилла имеют вид

$$y_{1,2}(s) = \beta^{1/2}(s) \exp \left[\pm i \int^s \frac{ds}{\beta(s)} \right].$$

Соответственно

$$y_{1,2}(s+L) = \beta^{1/2}(s+L) \exp \left[\pm i \int^s \frac{ds}{\beta(s)} \right].$$

Учитывая периодичность β и разбивая интеграл на два слагаемых, получаем

$$y_{1,2}(s+L) = \beta^{1/2}(s) \exp \left[\pm i \int_s^s \frac{dS}{\beta(s)} \right] \exp \left[\pm i \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)} \right] = \\ = y_{1,2}(s) \exp \left[\pm i \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)} \right].$$

Кроме того, в соответствии с уравнениями (5.29)

$$y_{1,2}(s+L) = y_{1,2}(s) \exp(\pm i\mu),$$

откуда

$$\mu = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (7.26)$$

и

$$\nu = \frac{N\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta(s)}, \quad (7.27)$$

где C — длина орбиты.

Выражение (7.26) можно рассматривать как новое определение μ , преимущество которого в том, что оно однозначно, в отличие от определения (5.28) [$\cos \mu = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$], которое определяет μ с точностью до $2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Глава 8

ЭМИТАНС, АДМИТАНС И ОГИБАЮЩАЯ

8.1. Эмитанс

В общем случае под *эмитансом* пучка заряженных частиц понимается фазовый объем (в осях — поперечные координаты и углы отклонения), занимаемый поперечным движением частиц пучка. В частности, для одномерного поперечного движения частиц эмитанс пучка

$$A = \iint dy dy', \quad (8.1)$$

где интегрирование проводится по любому сечению пучка, $y' = dy/ds$ — наклон орбиты к реперной кривой, y — любая из координат x, z (рис. 19).

Если пучок проходит некоторую оптическую систему (линзы, магниты, участки без поля), то форма фигуры A меняется. В отсутствие ускорения площадь A является инвариантом:

$$A = \text{const.} \quad (8.2)$$

Эта инвариантность следует из теоремы Лиувилля (см. разд. 29.4). Если оптическая система линейна (как линейно поле для большинства циклических ускорителей), то эта инвариантность следует также из того, что определитель матрицы перехода, описывающей действие оптической системы, равен единице [см. формулу (4.31)].

При изменении энергии пучка эмитанс его меняется в силу теоремы Лиувилля обратно пропорционально импульсу:

$$A \sim \frac{1}{p}. \quad (8.3)$$

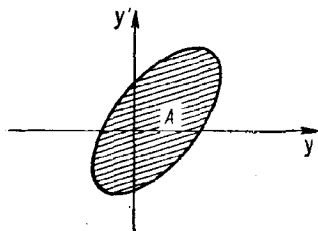


Рис. 19.

Эмитанс некоторых ускорителей.

1. Пучок, получаемый на генераторе Ван де Граафа и инжектируемый в протонный синхротрон «Сатурн» (Сакле, Франция), по состоянию на 1963 г. характеризуется следующими параметрами: кинетическая энергия $T_i = 3,6$ Мэв, протонный ток $i = 3$ ма. Измерение эмитанса показало, что в плоскости y, y' он имеет форму буквы S, что вероятно возникает вследствие сферической аберрации системы вытягивания вблизи ионного источника генератора Ван де Граафа. Эмитанс

$$A = \begin{cases} 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{рад} & \text{по S-образной фигуре;} \\ 6 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{рад} & \text{по площади эллипса, описанного вокруг} \\ & \text{S-образной поверхности.} \end{cases}$$

2. Пучок из линейного ускорителя, инжектируемый в протонный синхротрон ЦЕРН (Женева), по состоянию на 1963 г. характеризуется следующими параметрами: кинетическая энергия $T_i = 50$ Мэв; протонный ток $i = 40$ ма; эмитанс $A = (50 \div 60) \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{рад}$ (для 95% частиц пучка).

8.2. Понятие согласованного пучка

Эмитанс пучка приближенно равен произведению диаметра пучка на величину его углового раствора:

$$A \simeq 2\Delta y 2\alpha. \quad (8.4)$$

Произведение $2\Delta y 2\alpha$ является инвариантом пучка, но отношение $\Delta y/\alpha$ можно как угодно изменять с помощью оптической системы.

Проблема согласования пучка с установкой (ускорителем или спектрографом) состоит в задании для пучка перед его входом в установку такого отношения $\Delta y/\alpha$, при котором сечение пучка при его прохождении внутри установки становится по возможности наименьшим, позволяя тем самым уменьшить поперечные размеры канала установки и соответственно отрегулировать установку на максимальный эмитанс, т. е. на возможно большую интенсивность.

Максимальный эмитанс, определенный таким образом, называется *адмитансом* или *аксептансом* установки. Например, пусть

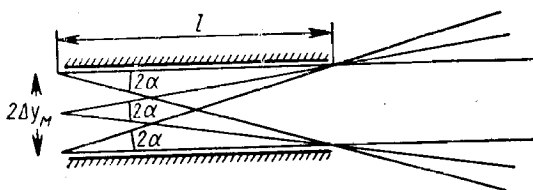


Рис. 20.

имеется канал длиной l , в котором поле отсутствует (рис. 20); пучок будет согласован с каналом при условии

$$\frac{\Delta y}{\alpha} = l. \quad (8.5)$$

Если частицы пучка движутся по синусоидальным траекториям с длиной волны λ , пучок будет согласован с данным каналом, когда амплитуда $\hat{a} = \Delta y = \lambda\alpha$, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\alpha} = \lambda. \quad (8.6)$$

Для вакуумной камеры полуширины a в качестве максимальных значений угла и амплитуды принимаются значения, соответствующие

$$\lambda\alpha_{\text{макс}} = \Delta y_{\text{макс}} = a.$$

Следовательно, аксептанс этой камеры

$$A = 2\alpha_{\text{макс}} 2\Delta y_{\text{макс}} = \frac{4a^2}{\lambda}, \quad (8.7)$$

и, наоборот, вакуумная камера с аксептансом A должна иметь полуширину

$$a = 0,5 \sqrt{\lambda A}. \quad (8.8)$$

В следующих разделах будут определены условия согласования пучка, предназначенного для инъекции в ускоритель с периодической структурой, и даны размеры огибающей такого пучка в ускорителе.

8.3. Инвариант Куранта—Снайдера

Покажем, что для любой частицы в ускорителе удовлетворяется соотношение

$$\frac{y^2 + (\alpha y + \beta y')^2}{\beta} = C = \text{const.} \quad (8.9)$$

Это выражение, называемое инвариантом Куранта—Снайдера, пропорционально поперечной энергии частицы.

Чтобы доказать справедливость выражения (8.9), образуем с помощью двух траекторий $y(s)$ и $y_1(s)$, удовлетворяющих уравнению Хилла, вронскиан [см. уравнения (6.12) и (6.14)]

$$y y_1' - y' y_1 = W = \text{const}, \quad (8.10)$$

и пусть $y(s)$ — действительное решение, а $y_1(s)$ — одна из собственных функций уравнения Хилла, например [см. соотношения (7.21)]

$$y_1 = \beta^{1/2} \exp i \Psi(s),$$

удовлетворяющая уравнению $y_1' = \frac{i - \alpha}{\beta} y_1$ [см. уравнение (7.13)].

Заметим, что произведение комплексно сопряженных величин $y_1 y_1^* = \beta$.

Вводя соотношение (7.13) в выражение вронскиана (8.10), получим

$$y_1 \left(\frac{i - \alpha}{\beta} y - y' \right) = W = \text{const}; \quad (8.11)$$

$$W W^* = \frac{y^2 + (\alpha y + \beta y')^2}{\beta} = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

8.4. Последовательные положения частицы в определенной азимутальной плоскости

Рассмотрим теперь в какой-либо азимутальной плоскости, определяемой координатой s_0 , последовательные положения частицы, которые она занимает, пересекая эту плоскость, после каждого оборота в ускорителе. Совокупность этих положений представим на фазовой плоскости y, y' . Пусть $\alpha(s_0) = \alpha_0$ и $\beta(s_0) = \beta_0$. Совокупность положений y, y' , которые занимает рассматриваемая частица в плоскости s_0 , удовлетворяет уравнению

$$\frac{y^2 + (\alpha_0 y + \beta_0 y')^2}{\beta_0} = C. \quad (8.12)$$

Это уравнение эллипса с центром в начале координат, оси которого наклонены к координатным осям y, y' (рис. 21).

Вдоль оси y координата точки эллипса достигает максимального значения при $\alpha_0 y + \beta_0 y' = 0$, $y_{\text{макс}} = \sqrt{\beta_0 C}$.

Используя теорему Аполлония для площади эллипса, получаем выражение

$$S = \pi y_{\text{макс}} y_0,$$

где y_0 — значение координаты y' при $y=0$; в соответствии с уравнением (8.12) $y_0 = \sqrt{C/\beta_0}$. Таким образом, площадь эллипса

$$S = \pi C. \quad (8.13)$$

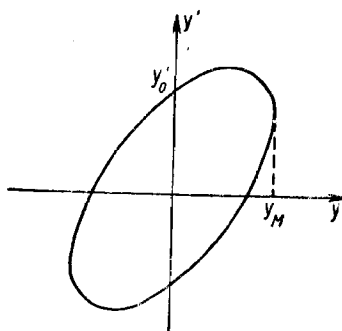


Рис. 21.

8.5. Согласование пучка

Рассмотрим теперь пучок, который пересекает азимутальную плоскость s_0 и эмитанс которого в фазовой плоскости y, y' точно покрывает внутренность эллипса (8.12). Эмитанс этого пучка

$$A = \pi C. \quad (8.14)$$

Каждая точка внутри эллипса соответствует положению некоторой частицы в азимутальной плоскости s_0 ; совокупность этих точек, образующая по мере обращения частицы в ускорителе, заполняет в фазовом пространстве y, y' эллипс, описываемый уравнением

$$\frac{y^2 + (\alpha_0 y + \beta_0 y')^2}{\beta_0} = C' < C. \quad (8.15)$$

Это значит, что эллипс (8.12), описывающий пучок, сохраняется и, следовательно, пучок стационарен в плоскости s_0 . При этих условиях очевидно, что максимальное отклонение $y_{\text{макс}}$ любой крайней траектории пучка в реальном пространстве наименьшее из возможных для данного эмитанса.

Таким образом, пучок с эмитансом A будет согласован в плоскости $s = s_0$, если он представлен в фазовом пространстве эллипсом

$$\frac{y^2 + (\alpha_0 y + \beta_0 y')^2}{\beta_0} = \frac{A}{\pi}. \quad (8.16)$$

Более того, пучок с эмитансом A , изображаемый стационарным эллипсом (8.12) в плоскости $s = s_0$, представляется и в любой другой

азимутальной плоскости стационарным эллипсом

$$\frac{y^2 + (\alpha y + \beta y')^2}{\beta} = \frac{A}{\pi}, \quad (8.17)$$

т. е. пучок согласован с установкой всюду.

Инжекцию пучка часто проводят в азимутальной плоскости симметрии магнитной структуры. В этой плоскости $\alpha = -\frac{1}{2}\beta' = 0$ и оси фазового эллипса для согласованного пучка совпадают с осями координат. Полуоси эллипса

$$y_{\text{макс}} = \sqrt{\beta A / \pi}, \quad y'_{\text{макс}} = \sqrt{A / \pi \beta}.$$

Пучок согласован, если в азимутальной плоскости, в которой происходит инжекция,

$$\frac{y_{\text{макс}}}{y'_{\text{макс}}} = \frac{\Delta y}{\alpha} = \beta. \quad (8.18)$$

Напомним [см. уравнение (7.24)], что

$$\beta(s) = \lambda(s).$$

8.6. Огибающая и форм-фактор F

Огибающая согласованного пучка, заполняющего эллипс (8.17), является геометрическим местом точек траекторий с максимальным отклонением от реперной кривой, которое достигается для $\alpha y + \beta y' = 0$. Огибающая согласованного пучка с эмитансом A , таким образом, выражается как

$$y_e(s) = \sqrt{\frac{\beta(s)A}{\pi}}. \quad (8.19)$$

Важно знать, в частности, максимальное значение этой огибающей, которое определяет поперечные размеры вакуумной камеры, в которой обращаются частицы. Огибающая достигает максимума для $\beta_s = \beta_{\text{макс}}$.

Определим форм-фактор огибающей следующим образом:

$$F = \frac{\beta_{\text{макс}}}{\bar{\beta}}. \quad (8.20)$$

Очевидно, $F \geq 1$. Форм-фактор равен единице, если бетатронные колебания чисто синусоидальные. Учитывая, что согласно уравнению (7.25) $\beta = R/v$, имеем

$$\beta_{\text{макс}} = F \frac{R}{v}. \quad (8.21)$$

Для максимального значения огибающей

$$(y_e)_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{ARF}{\pi v}}. \quad (8.22)$$

Если частицы при своем движении в вакуумной камере занимают тор с малым диаметром $2a$, то адмитанс такого ускорителя

$$A = \frac{\pi v a^2}{RF}. \quad (8.23)$$

Величина \sqrt{F} определяет, во сколько раз радиус огибающей больше радиуса пучка в ускорителе, в котором бетатронные колебания той же длины волны являются чисто синусоидальными.

8.7. Выражения $\beta_{\text{макс}}$ и F для структуры FOFDOD

В случае симметричной структуры FOFDOD [см. выражение (7.3)] коэффициент $\beta(s) = m_{12}(s)/\sin \mu$ достигает максимального значения β_m в середине участка O сектора FOF при некотором значении координаты s . Примем значение $s = s_m$ за начало отсчета интервала и определим элемент матрицы $m_{12}(s_m + L | s_m) = (m_{12})_m$. Выражая m_{12} , получим

$$\begin{aligned} \beta_m = (m_{12})_m (\sin \mu) = & \frac{\rho}{\sqrt{n} \sin \mu} \left[\text{sh } \varphi + \sin \varphi \text{ ch } \varphi + \right. \\ & + \frac{k\varphi}{2} (\cos \varphi + \text{ch } \varphi + \sin \varphi \text{ sh } \varphi + 2\cos \varphi \text{ ch } \varphi) + \\ & + \frac{k^2 \varphi^2}{4} (-2\sin \varphi + \text{sh } \varphi - \sin \varphi \text{ ch } \varphi + 2\cos \varphi \text{ sh } \varphi) + \\ & \left. + \frac{k^3 \varphi^3}{8} (-\cos \varphi + \text{ch } \varphi - \sin \varphi \text{ sh } \varphi) \right]. \quad (8.24) \end{aligned}$$

Разлагая в ряд по степеням $\varphi = \pi \sqrt{n}/N$ и учитывая, что согласно выражению (6.19) $\sin \mu \simeq \mu \simeq \varphi^2 \sqrt{\frac{1+k}{3}}$, получим

$$\beta_{\text{макс}} \simeq \frac{2\pi \sqrt{3} \rho \sqrt{1+k}}{N\varphi^2} \left(1 + \frac{1}{4} \varphi^2 \right). \quad (8.25)$$

Кроме того, $\bar{\beta} = \lambda = R/v$ [см. соотношение (7.25)], $v = \mu N/2\pi$ [см. формулу (6.1)], откуда

$$\bar{\beta} \simeq \frac{2\pi \sqrt{3} \rho \sqrt{1+k}}{N\varphi^2}. \quad (8.26)$$

Сравнивая $\beta_{\text{макс}}$ и $\bar{\beta}$, определяем форм-фактор

$$[F = \frac{\beta_m}{\bar{\beta}} \simeq 1 + \frac{1}{4} \varphi^2]. \quad (8.27)$$

Для протонного синхротрона ЦЕРН (см. гл. 6) было получено $\varphi = 1,08$. Приближенная формула (8.27) дает для форм-фактора значение $F = 1,29$.

8.8. Выводы

Эмитанс пучка $A = 2\Delta y 2\alpha$, где Δy и α берутся для любого сечения пучка.

Чтобы пучок имел наименьшее возможное сечение в ускорителе, он должен быть согласован с ускорителем. Пучок согласован с установкой в азимутальной плоскости симметрии структуры, если диаметр его сечения и угол его расхождения (угловая апертура пучка) находятся в соотношении

$$\frac{2\Delta y}{2\alpha} = \beta \text{ [см. формулу (8.18)],}$$

где β — элемент матрицы Твисса.

Максимальное значение огибающей для согласованного пучка с эмитансом A [см. формулу (8.22)]

$$(y_e)_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{ARF}{\pi v}}.$$

Для большинства магнитных структур со знакопеременным градиентом приближенное значение форм-фактора [см. формулу (8.27)]

$$F = 1 + \frac{\theta^2}{4},$$

где $\theta = \pi \sqrt{n/N}$.

Глава 9

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

9.1. Основы метода

Для решения дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, например уравнения Хилла

$$\left. \begin{aligned} y'' + K(s)y &= 0; \\ K(s+L) &= K(s), \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

можно использовать метод усреднения*. Этот метод позволяет получить длину волны λ решения и даже некоторые детали тонкой структуры этого решения, определяемые форм-фактором и огибающей, понятие о которых было введено в предыдущей главе.

* Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1963; Э. Л. Бурштейн, А. С. Соловьев. К теории знакопеременной фокусировки. «Докл. АН СССР», 1956. Т. 109, № 4, стр. 721; Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев. «Гамильтониан усредненного движения». «Докл. АН СССР», 1961. Т. 139, № 4, стр. 855.—Прим. ред.

Выше было показано, что характеристики орбиты являются функциями элементов матрицы перехода, равной произведению матриц перехода для элементарных интервалов. Расчеты, в общем довольно длинные, были упрощены благодаря тому, что функция $K(s)$ состояла из последовательности постоянных величин, соответствующей последовательности элементарных интервалов магнитного периода.

Метод усреднения особенно удобен в применении к синусоидальной структуре или структуре, которая может быть легко разложена в ряд Фурье. Метод усреднения предполагает, что период решения много больше периода функции K :

$$\lambda \gg L. \quad (9.2)$$

Метод состоит в замене восстанавливающей силы $-Ky$, быстро меняющейся на интервале длины L , средней восстанавливающей силой \overline{Ky} , эквивалентной первой. В соответствии с теоремой Флоке ищем решение в виде

$$y(s) = Y(s) [1 + \eta(s)]. \quad (9.3)$$

Полагаем, что в интервале длины L функции Y , Y' , Y'' изменяются мало и, кроме того, что

$$\eta(s+L) = \eta(s); \quad (9.4)$$

$$\overline{\eta} = \overline{\eta'} = \overline{\eta''} = 0. \quad (9.5)$$

Предположим также, что

$$|\eta| \ll 1. \quad (9.6)$$

Подставляя решение (9.3) в уравнение (9.1), получаем

$$Y''(1 + \eta) = 2Y'\eta' + Y\eta'' + K(1 + \eta)Y = 0. \quad (9.7)$$

В силу предположений (9.4) и (9.5) последнее уравнение после усреднения по интервалу L примет вид

$$Y'' + \overline{K}(1 + \eta)Y = 0. \quad (9.8)$$

Итак, усредненная траектория $Y(s)$, медленно меняющаяся внутри рассматриваемого интервала, представляется гармонической функцией

$$Y(s) = \cos\left(\frac{s}{\lambda} + \delta\right), \quad (9.9)$$

где $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\overline{K(1 + \eta)}}$ и δ — произвольная постоянная. Остается определить $\overline{K(1 + \eta)}$.

Вычитая уравнение (9.8) из уравнения (9.7), получаем дифференциальное уравнение для η :

$$Y''\eta + 2Y'\eta' + Y\eta'' + [K(1 + \eta) - \overline{K(1 + \eta)}]Y = 0. \quad (9.10)$$

В этом уравнении можно пренебречь членами $Y'\eta'$ и $Y''\eta$, порядок малости которых равен соответственно L/λ и $(L/\lambda)^2$ по сравнению с $Y\eta''$, величина которого порядка единицы. В итоге получаем уравнение для η :

$$\eta'' + [K(1+\eta) - \overline{K(1+\eta)}] = 0. \quad (9.11)$$

Кроме того, в соответствии с предположением (9.6),

$$K(1+\eta) - \overline{K(1+\eta)} \simeq K - \overline{K}.$$

Таким образом, окончательно имеем $\eta'' = -(K - \overline{K})$ и

$$\eta = \text{const} - \int_0^s ds \int_0^s (K - \overline{K}) ds, \quad (9.12)$$

причем постоянную выберем так, чтобы $\overline{\eta} = 0$. Для краткости запишем этот результат в следующем виде:

$$\eta = - [K - \overline{K}]_{II}, \quad (9.12a)$$

используя обозначения $\int f ds = [f]_I$; $\int ds \int f ds = [f]_{II}$. Учитывая уравнения (9.9) и (9.12a), преобразуем выражение $1/\lambda$:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \overline{K(1+\eta)} = \overline{K} - \overline{K[K - \overline{K}]_{II}}.$$

Последний член можно упростить, записав его в виде

$$\overline{K[K - \overline{K}]_{II}} = \overline{(K - \overline{K})[K - \overline{K}]_{II}} + \overline{\overline{K}[K - \overline{K}]_{II}},$$

где второе слагаемое равно $\overline{K}\eta = 0$, а первое слагаемое, используя формулу интегрирования по частям, преобразуем:

$$\overline{(K - \overline{K})[K - \overline{K}]_{II}} = \overline{[K - \overline{K}]_I [K - \overline{K}]_{II}} - \overline{[K - \overline{K}]_I^2};$$

первый член в этом выражении равен нулю как среднее произведение двух ортогональных функций, каждая из которых в среднем равна нулю. Окончательно имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} = \overline{K(1+\eta)} = \overline{K} + \overline{[K - \overline{K}]_I^2}. \quad (9.13)$$

9.2. Сводка основных формул

Уравнение $y'' + K(s)y = 0$, где $K(s+L) = K(s)$ [см. уравнения (9.1), (9.3), (9.9), (9.12), (9.13)], имеет в качестве приближенного решения выражение

$$y(s) = Y(s) [1 + \eta(s)],$$

где

$$\eta(s) = \text{const} - \int_0^s ds \int_0^s (K - \bar{K}) ds; \quad \bar{\eta} = 0$$

$$Y(s) = \text{const} \cos\left(\frac{s}{\lambda} + \delta\right),$$

причем λ определяется выражением

$$\frac{1}{\lambda^2} = \overline{K(1 + \eta)} = \bar{K} + \left[\int_{s_1}^s (K - \bar{K}) ds \right].$$

Метод усреднения предполагает, что $\lambda \gg L$.

Ранее было введено понятие набега фазы μ в решении уравнения Флоке, причем $\mu = 2\pi L/\lambda$. Практически метод усреднения позволяет определить длину бетатронных колебаний с точностью до нескольких процентов при условии, если величины μ и $1/\lambda$ не слишком велики, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \mu &\lesssim 0,6\pi; \\ \lambda &\geq 3L. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Обычно эти условия выполняются.

Однако этим методом нельзя получить какие-либо указания относительно неустойчивостей Флоке, которые соответствуют периодическим решениям с возрастающей амплитудой. Правда, с другой стороны, область (9.14), в которой применим метод гладких приближений, не содержит неустойчивостей Флоке, первая из которых возникает при

$$\mu = \pi; \quad \lambda = 2L.$$

Огибающая и форм-фактор. Таким образом, траектория частицы, определяемая выражением (9.3), не является чистой синусоидой, но благодаря множителю $(1 + \eta)$ представляет собой синусоиду, на которую наложены частые колебания малой амплитуды, обусловленные структурой магнитного периода. Учитывая это, можно найти приближенные формулы для огибающей и форм-фактора. Огибающая траекторий

$$y_e \sim 1 + \eta(s). \quad (9.15)$$

Для форм-фактора получаем выражение

$$\sqrt{F} = \frac{(y_e)_{\text{макс}}}{y_e} \simeq 1 + \eta_{\text{макс}}. \quad (9.16)$$

9.3. Применения

В этом разделе в качестве независимой переменной вместо s будем использовать угол $\theta = s/R$.

Пусть уравнение траектории имеет вид

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + k(\theta) y = 0, \quad (9.17)$$

где $k(\theta) = g_0 + g_1 \cos N\theta$. Решение его, согласно уравнению (9.3),

$$y(\theta) = Y(\theta) [1 + \eta(\theta)],$$

где $Y(\theta) = \exp(\pm i\nu\theta)$, $\nu = 2\pi/(\Delta\theta)_\lambda$ — число бетатронных колебаний на обороте, которое определяется формулами (9.9) и (9.13):

$$\nu^2 = \bar{k} + \left[\int_0^0 (k - \bar{k}) d\theta \right]^2 = g_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{g_1}{N} \right)^2. \quad (9.18)$$

Второй член выражает влияние знакопеременного градиента. Характеристики модуляции пучка имеют вид

$$\eta(\theta) = \text{const} - \int_0^0 d\theta \int_0^0 (k - \bar{k}) d\theta = \frac{g_1}{N^2} \cos N\theta, \quad (9.19)$$

$$\frac{(y_e)_{\text{макс}}}{\bar{y}_e} \sqrt{F} = 1 + \eta_{\text{макс}} = 1 + \frac{g_1}{N^2}. \quad (9.20)$$

Пусть траектория частицы определяется уравнением

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + k(\theta) y = 0$$

с восстанавливающей силой

$$k(\theta) = g_0 + \sum_m g_m \cos mN\theta + f_m \sin mN\theta. \quad (9.21)$$

В этом случае, когда m — целые числа, траектория имеет вид

$$y(\theta) = Y(\theta) [1 + \eta(\theta)],$$

где

$$\left. \begin{aligned} Y(\theta) &= \exp(\pm i\nu\theta), \\ \nu^2 &= g_0 + \frac{1}{2N^2} \sum_m \frac{g_m^2 + f_m^2}{m^2}, \\ \eta(\theta) &= \frac{1}{N^2} \sum_r \left(\frac{g_r}{m^2} \cos mN\theta + \frac{f_r}{m^2} \sin mN\theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

Высокочастотная фокусировка

В качестве одного из примеров использования метода усреднения рассмотрим высокочастотную фокусировку. Идея фокусировки с помощью высокочастотного поля с переменным градиентом была предложена Полем. Она состоит в том, что между четырьмя параллельными шинами (проводниками), образующими квадруполь

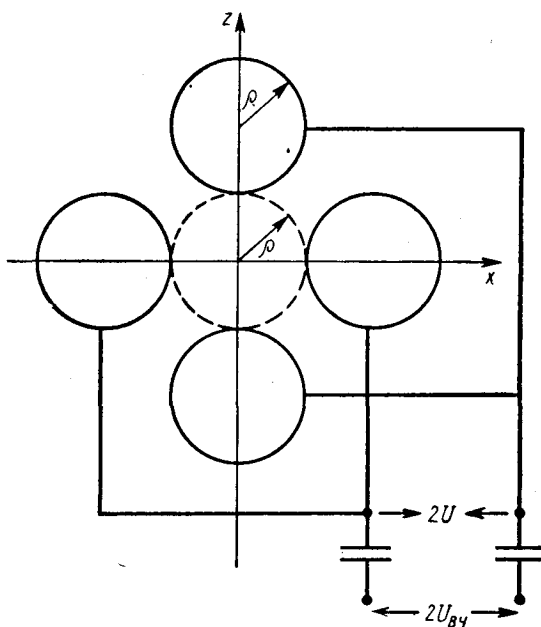


Рис. 22.

(рис. 22), подается постоянное напряжение $2U$ и переменное напряжение $2U_{вч} = 2U_{вч} \times \cos \omega_{вч} t$. Такая установка способна фокусировать пучок, движущийся вдоль оси квадруполя. Этот метод фокусировки, использующий электрические поля, становится эффективным по сравнению с фокусировкой магнитными полями со знакопеременным постоянным во времени градиентом для частиц, имеющих скорости $v \ll c$.

Уравнение движения частицы, летящей в центральной части рассматриваемой установки вдоль шин, имеет вид

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + (\pm a - a' \pm 2q \cos 2\xi) y = 0, \quad (9.23)$$

где переменной y соответствует поперечная координата x или z и $\xi = \omega_{вч} t/2 = \pi \nu_{вч} t$; $a = \frac{8eU}{M\omega_{вч}^2 \rho^2}$ — сила, возникающая благодаря

постоянному потенциалу $2U$; знак \pm относится соответственно к переменной x или z ; $a' = \frac{2el}{\pi \epsilon_0 M \omega_{ВЧ}^2 \rho^2}$ — сила, обусловленная пространственным зарядом пучка; I — ток пучка; предполагается, что он протекает с постоянной плотностью внутри кругового цилиндра радиусом ρ , занимающего все пространство между шинами; v и M — скорость и масса частицы; $q = \frac{4eU_{ВЧ}}{M \omega_{ВЧ}^2 \rho^2}$ — амплитуда фокусирующей силы, обусловленной переменным градиентом ВЧ-поля.

Решение этого уравнения движения

$$y = \left(1 + \frac{q}{2} \cos 2\xi\right) \exp\left(i \sqrt{\pm a - a' + \frac{1}{2} q^2 \xi}\right). \quad (9.24)$$

Частота медленных колебаний («бетатронных»)

$$\nu_{\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\pm a - a' + \frac{1}{2} q^2} \nu_{ВЧ}. \quad (9.25)$$

Набег фазы на периоде фокусировки

$$\mu = 2\pi \frac{\nu_{\beta}}{\nu_{ВЧ}}. \quad (9.26)$$

Структура FD

В качестве другого примера рассмотрим простейшую сильнофокусирующую структуру постоянного магнитного поля. Уравнение для координаты x траектории частицы в структуре FD в случае, когда в качестве независимой переменной выбран азимут $\theta = s/\rho$, записывается в виде

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + n(\theta) x = 0, \quad (9.27)$$

где $n(\theta) = \pm n_0$ попеременно, причем длина каждого интервала, внутри которого $n(\theta) = \text{const}$, равна половине длины структуры FD :

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\pi}{N}, \quad (9.28)$$

как это изображено на рис. 23.

Разложим $n(\theta)$ в ряд Фурье:

$$n(\theta) = \frac{4}{\pi} n_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)} \sin(2l+1) N\theta. \quad (9.28a)$$

Решение уравнения (9.27) в рамках метода усреднения

$$x(\theta) = X(\theta) [1 + \eta(\theta)],$$

$$X(\theta) = \exp(\pm i v \theta)$$

$$v^2 = \frac{1}{2N^2} \left(\frac{4n_0}{\pi} \right)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^4} = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{n_0^2}{N^2}$$

[см. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., Изд-во иностр. лит., 1968] соответственно

$$v = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{n_0}{N}. \quad (9.29)$$

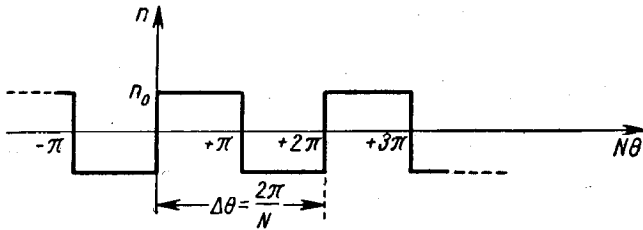


Рис. 23.

Этот результат был уже получен выше [см. формулы (6.13)] разложением в ряд точного выражения для $\cos \mu$, найденного с помощью матрицы перехода. Кроме того, находим

$$\eta(\theta) = \frac{4n_0}{\pi N^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^3} \sin(2l+1) N\theta \quad [\text{см. формулы (9.22)}],$$

которое достигает максимального значения $\eta_{\text{макс}}$ при

$$N\theta = 2\pi \left(\frac{1}{4} + m \right); \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$\eta_{\text{макс}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{n_0}{N^2} \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \right) = \frac{1}{8} \frac{\pi^2 n_0}{N^2}$$

(см. Г. Б. Двайт).

Форм-фактор определяется как

$$\frac{(x_e)_{\text{макс}}}{\bar{x}_e} = \sqrt{F_x} = 1 + \eta_{\text{макс}} = 1 + \frac{1}{8} \frac{\pi^2 n_0}{N^2}, \quad (9.30)$$

что совпадает с формулой (8.27) при $\theta = \frac{\pi \sqrt{n_0}}{N}$.

Часть третья

ВОЗМУЩЕННАЯ СТРУКТУРА

Глава 10

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ И РЕЗОНАНСОВ

Уравнение бетатронных колебаний в случае реальной магнитной структуры содержит помимо тех членов, которые рассматривались до сих пор, также небольшие добавочные члены (возмущения). Как будет показано ниже, присутствие последних может привести к неустойчивости движения частиц. Бетатронные колебания становятся неустойчивыми, если возмущение находится в резонансе с колебаниями невозмущенной системы. Возмущения могут определяться ошибками в магнитном поле и самой структурой поля идеальной машины и выражаться как линейными, так и нелинейными функциями отклонения.

Далее будет произведена оценка этих членов и найдены условия неустойчивости для определенных случаев. Определяющую роль в этих вопросах играет параметр ν — число бетатронных колебаний за один оборот, и, следовательно, задача будет сводиться к нахождению значений ν , при которых возмущенная система устойчива.

10.1. Ошибки юстировки магнитов или величины поля

В реальном магните к основному идеальному полю добавляются небольшие возмущения

$$\delta B_z(\theta) \text{ или } \delta B_x(\theta). \quad (10.1)$$

Возмущение $\delta B_z(\theta)$ может быть вызвано разницей в зазоре магнитных блоков, разбросом остаточных полей и полей насыщения. В прямолинейных промежутках существует паразитное поле, определяемое магнитным полем Земли, а также полями рассеяния значительных магнитных масс. Общее паразитное поле имеет величину порядка поля Земли, но весьма неоднородно и изменяется во времени. Возмущение $\delta B_x(\theta)$ в основном определяется сдвигом магнитов по высоте. Наклон магнита также создает поле возмущения δB_x [см. уравнение (10.18a)].

Смещение магнита δx или δz эквивалентно изменению поля

$$\delta B_z = -nB_0 \frac{\delta x}{\rho}; \quad \delta B_x = nB_0 \frac{\delta z}{\rho}. \quad (10.2)$$

Точность установки магнитов по осям x и z обычно составляет $\pm 0,1$ мм независимо от диаметра электромагнита.

Практическое значение величины $\sqrt{\langle(\delta B)^2\rangle}/B_0$ составляет около 10^{-3} для слабых полей (≈ 100 гс) и около 10^{-4} для средних (≈ 500 гс) и сильных полей.

Изменение магнитного поля приводит к появлению дополнительной силы, действующей на частицу,

$$\delta F = ev\delta B. \quad (10.3)$$

Так как это возмущение является периодической функцией азимута, то его можно разложить в ряд Фурье. При этом в уравнении поперечного движения $y'' + \nu^2 y = 0$ появится дополнительный член

$$\delta y'' \sim \delta B \sim \sum \varepsilon_k \cos(k\theta + \delta_k). \quad (10.4)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \nu^2 y = \varepsilon \cos k\theta. \quad (10.5)$$

Известно, что его решение можно представить в виде

$$y = y_1 + y_2, \quad (10.6)$$

где y_1 — решение однородного уравнения, а y_2 — частное решение неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения

$$y_1 = a_1 \cos \nu\theta + a_2 \sin \nu\theta, \quad (10.7)$$

а частное решение

$$y_2 = \frac{\varepsilon}{\nu^2 - k^2} \cos k\theta + b_1 \cos \nu\theta + b_2 \sin \nu\theta. \quad (10.8)$$

Выберем постоянные b_1 и b_2 так, чтобы удовлетворялись условия

$$y_2(2\pi) = y_2(0); \quad y_2'(2\pi) = y_2'(0). \quad (10.9)$$

Определенное таким образом решение y_2 описывает стационарную замкнутую орбиту — «оптическую ось», около которой происходят свободные бетатронные колебания.

Решение (10.8) обращается в бесконечность, если ν — целое число.

Проанализировав частное решение, можно оценить скорость нарастания амплитуды вблизи резонанса:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\varepsilon}{\nu^2 - k^2} (\cos k\theta - \cos \nu\theta) = \\ &= \frac{2\varepsilon}{\nu^2 - k^2} \left[\sin\left(\frac{\nu+k}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{\nu-k}{2}\theta\right) \right] = \frac{\varepsilon\theta}{2\nu} \sin \nu\theta \quad (10.10) \\ &\quad (\text{для } \nu = k). \end{aligned}$$

10.2. Ошибки δn показателя поля

Уравнение невозмущенного движения

$$y'' + R^2 [n(\theta)/\rho^2] y = 0$$

при введении средней фокусирующей силы принимает вид $y'' + v_0^2 y = 0$. Возмущение $\delta n(\theta)$ изменяет коэффициент при y , так что уравнение приводится к виду

$$y'' + \left(v_0^2 + \frac{R^2 \delta n(\theta)}{\rho^2} \right) y = 0.$$

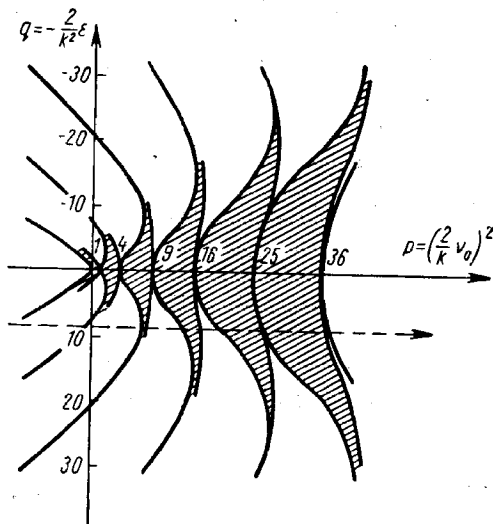


Рис. 24.

После разложения δn в ряд Фурье для каждой Фурье-компоненты возмущения получим

$$y'' + (v_0^2 + \epsilon \cos k\theta) y = 0, \quad (10.11)$$

где v_0 — частота бетатронных колебаний в отсутствие возмущения.

Если обозначить

$$k\theta = 2x; \quad \left(\frac{2v_0}{k} \right)^2 = p; \quad \frac{4\epsilon}{k^2} = -2q, \quad (10.12)$$

то уравнение (10.11) преобразуется к уравнению Матье в общепринятых обозначениях:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (p - 2q \cos 2x) y = 0. \quad (10.13)$$

Известные свойства этого уравнения позволяют легко оценить влияние возмущения δl на траекторию частицы. На рис. 24 показаны области, внутри которых решение уравнения Матье устойчиво (ограничено) или же неустойчиво (области устойчивости заштрихованы). Устойчивые решения этого уравнения имеют осциллирующую форму. Неустойчивые решения квазипериодичны и имеют нарастающую амплитуду. Заметим, кстати, что траектория, проходящая через систему эквидистантных линз с одинаковой оптической силой, также описывается уравнением Матье. На рис. 15 было показано неустойчивое решение.

Для $q = 0$, $p = m^2$ уравнение Матье вырождается в уравнение гармонических колебаний. Решение его устойчиво и имеет период

$$\Delta x = \frac{2\pi}{m}. \quad (10.14)$$

Внутри областей, ограниченных двумя линиями, сходящимися в одной точке $q = 0$, $p = m^2$ (см. рис. 24), решения уравнения Матье неустойчивы, но колебания имеют постоянный период $\Delta x = 2\pi/m$, хотя их амплитуда и возрастает. Согласно обозначениям (10.12) период и частота бетатронных колебаний за один оборот также остаются постоянными, а именно, в том случае, когда колебания неустойчивы, их период

$$\Delta\theta = \frac{2\Delta x}{k} = \frac{4\pi}{mk}, \quad (10.15)$$

а число бетатронных колебаний

$$\nu = \frac{2\pi}{\Delta\theta} = \frac{mk}{2},$$

где m , k — целые числа, а k — номер гармоники возмущения, вызывающего резонанс. Поскольку возмущения показателя спада поля могут содержать любые гармоники, общее правило для запрещенных частот таково:

$$\nu = n/2, \quad (10.16)$$

где n — целое число.

При изменении фокусирующей силы p и постоянной величины возмущения q рабочая точка (см. рис. 24) движется параллельно оси p , пересекая области неустойчивости всякий раз, когда ν/k становится равным целому или полуцелому числу.

Если электромагнит содержит N элементов периодичности, то основная гармоника возмущения показателя спада поля имеет номер $k = N$, т. е. опасные области возникают при $\nu = N/2, 2(N/2), \dots$ Это утверждение является также следствием теоремы Флоке. Аналогичный ускоритель, имеющий N' суперпериодов (образованных, например, длинными прямолинейными промежутками), имеет полосы неустойчивости при $\nu = N'/2, N', 3N'/2, \dots$ Например, для шести прямолинейных промежутков области неустойчивости получаются при $\nu = 3, 6, 9, \dots$

10.3. Линейная связь

Если к основному полю ускорителя добавляется поле квадруполя, оси которого ориентированы по x и z , то линейная связь колебаний, возникающая в этом случае, описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x'' + Kx &= \varepsilon z; \\ z'' - Kz &= \varepsilon x. \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

В самом деле, общий вид скалярного потенциала, соответствующего линейному полю, имеет вид

$$\varphi = -B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho} \right) z - Q(x^2 - z^2), \quad (10.18)$$

откуда магнитное поле

$$B_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -B_0 \frac{n}{\rho} x - 2Qz$$

и

$$-B_x = +\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B_0 \frac{n}{\rho} z - 2Qx.$$

Если учесть, что силы, действующие на частицу, $f_x = e v B_z$; $f_z = -e v B_x$, то легко прийти к уравнениям вида (10.17). Подобная связь уравнений может получиться, например, за счет незначительного наклона магнита в плоскости xz . Действительно, если взять потенциал в виде

$$\varphi_0 = -B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho} \right)$$

и повернуть оси координат на малый угол δ , то получится

$$\varphi = -B_0 \left(1 - \frac{n}{\rho} x \right) z - B_0 \frac{n}{\rho} (x^2 - z^2) \delta - B_0 x \delta, \quad (10.18a)$$

т. е. потенциал вида (10.18) и, кроме того, член, соответствующий однородному полю и эквивалентный ошибке δz в сдвиге магнита.

Величина связи, естественно, также будет функцией азимута, и, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Для каждой Фурье-компоненты соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} x'' + v_x^2 x &= \varepsilon z \cos k\theta; \\ z'' + v_z^2 z &= \varepsilon x \cos k\theta. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

Если ε достаточно мало, то x и z в правых частях можно заменить решениями соответствующих однородных уравнений. Тогда, например, для оси x приходим к уравнению

$$x'' + v_x^2 x = \varepsilon z \cos k\theta = \varepsilon_1 \cos v_z \theta \cos k\theta.$$

Чтобы оценить влияние правой части, представим ее в виде, удобном для интегрирования, заменив произведение суммой:

$$\cos v_z \theta \cos k\theta = \frac{1}{2} [\cos (v_z + k) \theta + \cos (v_z - k) \theta],$$

откуда следуют резонансные условия:

$$v_x = \begin{cases} v_z + k \\ v_z - k \text{ или } |v_x - v_z| = k \\ k - v_z \quad v_x + v_z = k. \end{cases} \quad (10.20)$$

Более тщательный анализ показывает, что только суммовый резонанс приводит к неустойчивости, при разностном же резонансе происходят лишь биения между двумя амплитудами.

10.4. Нелинейные резонансы

Резонансные частоты

В уравнениях движения для реальной машины всегда присутствуют небольшие нелинейные члены. Рассмотрим уравнения вида $x'' + v^2 x = \varepsilon x^l z^m \cos kN\theta$ и, в частности, уравнение

$$x'' + v^2 x = \varepsilon_1 x^2 \cos kN\theta \approx \varepsilon \left(\frac{\cos}{\sin} \right)^2 v\theta \cos kN\theta. \quad (10.21)$$

Преобразовав правую часть, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon x^2 \left(\frac{\sin^2}{\cos^2} \right) v\theta \cos kN\theta = \\ & = \frac{\varepsilon x^2}{4} [\mp \cos (kN + 2v) \theta \pm \cos (kN - 2v)\theta + 2 \cos kN\theta], \end{aligned} \quad (10.22)$$

откуда следует, что нелинейный резонанс возникает при

$$\pm (kN - 2v) = v$$

или при

$$v = kN; \quad v = \frac{kN}{3}. \quad (10.23)$$

Первое из этих соотношений совпадает с условием для обычного линейного резонанса.

Аналогично для уравнения общего типа $x'' + v^2 x = \varepsilon x^{l-1} \cos kN\theta$ можно найти, что резонансы наступают при

$$v = \frac{kN}{l}. \quad (10.24)$$

В машинах типа ПППГ*, где магнитное поле существенно нелинейно, эти резонансы играют весьма важную роль, особенно для малых

* Постоянное поле, переменный градиент. — Прим. перев.

значений k и l . В ускорителе с линейным полем и азимутально-переменным градиентом влиянием нелинейностей на первой стадии расчета можно пренебречь.

В астрономии это приводит к появлению неустойчивых зон, в которых не могут находиться орбиты планет или астероидов. Аналогично объясняется существование промежутков между кольцами Сатурна. Азимутальная периодичность $N = 1$ в гравитационном поле Солнца объясняется влиянием поля наиболее тяжелой планеты — Юпитера, а причиной существования промежутков у Сатурна является один из спутников последнего (см. J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen IIa, 1955).

Предельная амплитуда

Если колебания нелинейны, то их частота зависит от амплитуды. Обозначим ν_0 частоту бета-тронных колебаний за один оборот, если амплитуда этих колебаний бесконечно мала. Пусть, далее, ν_0 находится вблизи резонансного значения ν_r . При изменении амплитуды колебаний частота их также изменится, и при амплитуде, соответствующей $\nu = \nu_r$, устойчивость должна нарушаться.

Значение предельной амплитуды можно получить, пользуясь методом сравнения гармоник. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + \nu_0^2 x = \epsilon x^2 \cos kN\theta. \quad (10.21a)$$

Согласно формулам (10.23) в этом случае резонанс возникает при

$$\nu = \nu_r = \frac{kN}{3}.$$

Если уравнение движения нелинейно, то траектория частицы уже не будет чистой синусоидой, но может быть выражена в виде ряда, что для резонансных условий дает

$$x = \sum_i x_i \cos i\nu_r \theta = x_1 \cos \frac{kN}{3} \theta + \dots \quad (10.25)$$

Члены с $i > 1$ не резонансны и дают малый вклад по сравнению с x_1 , которое практически совпадает с амплитудой колебаний. Величину амплитуды x_1 можно найти, подставив (10.25) в (10.21a) и приравняв коэффициенты при $\cos \frac{kN}{3} \theta$ в правой и левой частях уравнения. Подстановка в левую часть дает

$$x'' + \nu_0^2 x = x_1 \left[\nu_0^2 - \left(\frac{kN}{3} \right)^2 \right] \cos \frac{kN}{3} \theta + \dots;$$

при той же подстановке в правую часть получим, учитывая уравнение (10.22) и то, что $kN - 2\nu_r = kN/3$:

$$\epsilon x^2 \cos kN\theta = \frac{\epsilon x_1^2}{4} \left[\mp \cos \frac{kN}{3} \theta + \dots \right].$$

Приравнивая затем коэффициенты при $\cos kN\theta/3$, находим амплитуду x_1 :

$$x_1 = \frac{4}{\varepsilon} \left| v_0^2 - \left(\frac{kN}{3} \right)^2 \right|. \quad (10.26)$$

Аналогично для нелинейности вида $\varepsilon x^3 \cos kN\theta$ можно найти конечную амплитуду

$$x_1^2 = \frac{8}{\varepsilon} \left| v_0^2 - \left(\frac{kN}{4} \right)^2 \right|. \quad (10.26a)$$

10.5. Нелинейный резонанс связи (Уокиншоу)

В циклотронах и фазотронах важное значение имеет также нелинейный резонанс связи. Соответствующее уравнение движения (по оси z) имеет вид

$$z'' + v_z^2 z = \varepsilon x z. \quad (10.27)$$

Величина $\varepsilon x z$ становится достаточно большой в поле рассеяния на периферийной части классического циклотрона или фазотрона и особенно в поле спирального циклотрона, которое существенно нелинейно.

Аналогичное уравнение для x рассматривать нет надобности ввиду симметрии поля.

Правую часть (10.27) можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon x z = \varepsilon_1 \cos v_x \theta \cos v_z \theta = \frac{\varepsilon_1}{2} [\cos (v_x + v_z) \theta + \cos (v_x - v_z) \theta],$$

откуда вытекает условие наступления резонанса:

$$v_x - v_z = v_z$$

или

$$v_x = 2v_z. \quad (10.28)$$

В классическом циклотроне и фазотроне показатель спада поля $n = \rho/B(dB/dx) = 0$. На периферийной части этих машин, в поле рассеяния, показатель спада возрастает, причем зависимость его от радиуса становится сильно нелинейной. Если показатель спада достигает величины порядка 0,2, то $v_x = \sqrt{1-n} = 0,9$; $v_z = \sqrt{n} = 0,45$, что приводит к потере пучка.

В спиральном циклотроне частота бетатронных колебаний в горизонтальной плоскости зависит от энергии частицы по закону $v_x = E/E_0$, а v_z в районе инжекции находится вблизи нуля. Следовательно, необходимо обеспечить выполнение условия $0 < v_z < (1/2) v_x$.

Резонанс Уокиншоу является частным случаем нелинейных резонансов связи, которые в общем случае возникают при выполнении условий

$$lv_x + mv_z = n; \quad l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.29)$$

$|l| + |m| = p$ называется *порядком резонанса*.

Однако, как показывают теория и практика, резонансы порядка $p > 4$ не приводят к увеличению амплитуды. Более детально проблемы резонансов описаны в известной работе Шоха [XVI].

10.6. Перечень основных резонансов

k -я гармоника возмущения поля или ошибки юстировки	$v = k$	
k -я гармоника возмущения показателя спада	$v = m \frac{k}{2}$	}
Наличие N периодов магнита	$v = m \frac{N}{2}$	
Наличие N' суперпериодов магнита	$v = m \frac{N'}{2}$	
Линейная связь (k -я гармоника)	$v_x + v_z = k$	
Нелинейность порядка $(l-1)$ и периодичность kN	$v = \frac{k}{l} N; \quad k = 1, 2 \dots$	
Нелинейная связь (Уокиншоу)	$v_x = 2v_z$	
Нелинейная связь (общий случай)	$lv_x + mv_z = n;$ $l, m, n = 0, \pm 1; \dots$	

Глава II

ОШИБКИ УСТАНОВКИ МАГНИТОВ И ВЕЛИЧИНЫ ПОЛЯ

11.1. Уравнение возмущенного движения

В отсутствие возмущения уравнение траектории имеет вид

$$y'' + K(s)y = 0.$$

Если элементы магнита ускорителя из-за ошибок в их расстановке смещены на δy относительно их идеального положения, то уравнение траектории запишется в виде

$$y'' + K(s)[y - \delta y(s)] = 0,$$

или

$$y'' + K(s)y = K\delta y(s) = \pm \frac{n(s)}{\rho^2} \delta y(s)$$

(знак «—» для оси x , знак «+» для оси z). Магнитное поле $B = B_0(1 - nx/\rho)$ также имеет небольшие отклонения $\delta B_0(s)$, влияние которых на движение частицы эквивалентно радиальным смещениям

$$\delta x = \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\delta B_0}{B_0},$$

т. е. в этом случае к правой части уравнения добавится величина

$$\frac{n}{\rho^2} \delta x = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta B}{B}$$

(индекс 0 опущен). Полученное после этого уравнение запишем в виде

$$y'' + K(s)y = F(s), \quad (11.1)$$

где

$$F(s) = \pm \frac{n(s)}{\rho^2} \delta y(s) \mp \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta B(s)}{B}.$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно сделать следующую замену переменных

$$\eta = y\beta^{-1/2}; \quad \theta = \int \frac{ds}{v\beta}, \quad (11.2)$$

где β — коэффициент матрицы Твисса. Напомним, что в отсутствие возмущений ($F = 0$) траектория имеет вид $y = \beta^{1/2} \cos \int ds/\beta$ [см. уравнение (7.22)] или в новых переменных $\eta = \cos(v\theta + \delta)$, а уравнение движения в новых переменных:

$$\frac{d^2\eta}{d\theta^2} + v^2\eta = 0.$$

Переменная θ изменяется на 2π за один оборот частицы

$$(\Delta\theta)_{об} = 2\pi. \quad (11.3)$$

Уравнение возмущенного движения (11.1) в новых переменных принимает вид

$$\frac{1}{v^2 \beta^{3/2}} \cdot \frac{d^2\eta}{d\theta^2} + \frac{\eta}{\beta^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \beta\beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + K\beta^2 \right) = F.$$

Напомним [см. формулу (7.19)], что

$$\frac{1}{2} \beta\beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + K\beta^2 = 1.$$

В результате

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{d\theta^2} + \nu^2 \eta &= \nu^2 \beta^{3/2} F = \nu^2 f(\theta), \\ \text{где} \quad f &= \beta^{3/2} \left(\frac{\pm n}{\rho^2} \delta y \mp \frac{1}{\rho} \frac{\delta B}{B} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Таким образом, первоначальное уравнение (11.1) с периодическим коэффициентом сведено к хорошо известному уравнению гармонического осциллятора с правой частью, не равной нулю.

11.2. Замкнутая орбита

Известно, что линейное неоднородное уравнение

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = \varphi(t)$$

можно проинтегрировать методом вариации произвольных постоянных, и тогда интеграл записывается в виде

$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + u_p(t)$, где u_1 и u_2 — частные решения однородного уравнения и

$$u_p(t) = -u_1 \int \frac{\varphi u_2}{\omega} dt + u_2 \int \frac{\varphi u_1}{\omega} dt,$$

причем $\omega = u_1 u_2' - u_2 u_1' = \text{const}$.

В частности, интеграл уравнения (11.4)

$$\eta(\theta) = \eta_0 \sigma(\theta) + \eta_0' \tau(\theta) + \eta_p(\theta), \quad (11.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \cos \nu(\theta - \theta_0); \quad \tau = \frac{1}{\nu} \sin \nu(\theta - \theta_0); \\ \eta_p &= \nu \left[-\cos \nu(\theta - \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} f(t) \sin \nu(t - \theta_0) dt + \right. \\ &\quad \left. + \sin \nu(\theta - \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} f(t) \cos \nu(t - \theta_0) dt \right] = \\ &= \nu \int_{\theta_0}^{\theta} f(t) [\sin \nu(\theta - t)] dt. \end{aligned} \right\} \quad (11.5a)$$

Константы $\eta_0 = \eta(\theta_0)$ и $\eta_0' = \left[\frac{d\eta}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_0}$ в формуле (11.5) произвольны. Выберем их таким образом, чтобы «замкнутая орбита» η_f удовлетворяла соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta_f(\theta_0 + 2\pi) &= \eta_f(\theta_0); \\ \eta_f'(\theta_0 + 2\pi) &= \eta_f'(\theta_0), \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

тогда из выражений (11.5) и (11.6)

$$\eta_1 = \eta_0 \sigma_1 + \eta_0' \tau_1 + (\eta_p)_1 = \eta_0;$$

$$\eta_1' = \eta_0 \sigma_1' + \eta_0' \tau_1' + (\eta_p)_1' = \eta_0'$$

(индекс ' здесь соответствует точке $\theta = \theta_0 + 2\pi$).

Из этих уравнений определяются величины η_0 и η_0'

$$\eta_0 = \frac{\begin{vmatrix} -(\eta_p)_1 & \tau_1 \\ -(\eta_p)_1' & (\tau_1' - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\sigma_1 - 1) & \tau_1 \\ \sigma_1' & (\tau_1' - 1) \end{vmatrix}}.$$

Подставляя в коэффициенты определителей выражения (11.5a), приходим к соотношению

$$\eta_0 = \frac{v}{2 \sin \pi v} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(t) \cos v(\theta_0 + \pi - t) dt,$$

где $\eta_0 = \eta_f(\theta_0)$ — значение η на замкнутой орбите в точке $\theta = \theta_0$. Поскольку эта точка произвольна, то замкнутая орбита для любой точки θ удовлетворяет соотношению

$$\eta_f(\theta) = \frac{v}{2 \sin \pi v} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(t) \cos v(\theta + \pi - t) dt. \quad (11.7)$$

Общий интеграл возмущенного движения удобно записать в виде

$$\eta = C_1 \sigma + C_2 \tau + \eta_f. \quad (11.8)$$

Легко видеть, что интеграл (11.8) описывает свободные бетатронные колебания относительно замкнутой орбиты.

11.3. Наибольшее вероятное отклонение замкнутой орбиты

Оценим теперь максимальное вероятное отклонение замкнутой орбиты, считая известным среднеквадратичное значение возмущений. С этой целью составим выражение

$$V(\theta) = \eta_f^2 + \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \eta_f}{\partial \theta} \right)^2 \quad (11.9)$$

и заметим, что для идеальной машины, где траектории задаются уравнением

$$\eta = \hat{\eta} \cos(v\theta + \delta),$$

равенство (11.9) дает $V = \eta^2$. Следовательно, можно рассматривать $\overline{V(\theta)} = \overline{\eta^2}$ как меру среднеквадратичного значения максимального отклонения замкнутой орбиты.

Используя выражение (11.7), вычислим

$$\begin{aligned} \eta_f^2 &= \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi v} \int_0^{\theta+2\pi} f(t) \cos v(\theta + \pi - t) dt \int_0^{\theta+2\pi} f(\tau) \cos v(\theta + \pi - \tau) d\tau = \\ &= \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi v} \int_0^{\theta+2\pi} \int_0^{\theta+2\pi} f(t) f(\tau) \cos v(\theta + \pi - t) \cos v(\theta + \pi - \tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Дифференцируя соотношение (11.7), найдем

$$\left. \begin{aligned} \eta_f' &= -\frac{v^2}{2 \sin \pi v} \int_0^{\theta+2\pi} f(t) \sin v(\theta + \pi - t) dt; \\ \left(\frac{\eta_f'}{v}\right)^2 &= \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi v} \int_0^{\theta+2\pi} \int_0^{\theta+2\pi} f(t) f(\tau) \sin v(\theta + \pi - t) \times \\ &\quad \times \sin v(\theta + \pi - \tau) dt d\tau; \\ V(\theta) &= \eta_f^2 + \left(\frac{\eta_f'}{v}\right)^2 = \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi v} \int_0^{\theta+2\pi} \int_0^{\theta+2\pi} f(t) f(\tau) \times \\ &\quad \times [\cos v(t - \tau)] dt d\tau. \end{aligned} \right\} (11.10)$$

Характер зависимости среднего значения $\overline{V} = \overline{\eta^2}$ от азимута зависит от способа юстировки магнитов. Обычно делают следующие предположения.

1. Магнит состоит из M звеньев равной длины $\Delta s = 2\pi\rho/M$, которые юстируются независимым образом. В этом случае

$$\Delta\theta_i = \frac{\Delta s}{v\beta_i} = \frac{2\pi\rho}{Mv\beta_i}; \quad (11.11)$$

$$\overline{(\Delta\theta_i)^2} = \frac{4\pi^2\rho^2}{M^2 v^2 \beta_i^2}.$$

2. На протяжении каждого звена $\beta_i = \text{const}$, $f_i = \text{const}$.

3. Корреляция между возмущениями, соответствующими различным звеньям, отсутствует. Из этих трех допущений

$$\overline{f(t) f(\tau)} = \begin{cases} \overline{f_i^2}, & \text{если } |t - \tau| < \Delta\theta; \\ \theta, & \text{если } |t - \tau| > \Delta\theta. \end{cases}$$

4. Корреляция между ошибками юстировки δu и поля δB отсутствует.

В результате с учетом соотношений (11.4)

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_i^2 &= \bar{\beta}^3 \left[\frac{n^2}{\rho^4} (\overline{\delta y})^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\overline{\delta B}}{B} \right)^2 \right] \\ \text{и} \\ \cos \nu(t - \tau) &\approx 1, \text{ если } |t - \tau| < \Delta\theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

Подставив эти величины в уравнение (11.10), можно убедиться, что

$$V(\theta) = \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^M (f_i \Delta\theta_i)^2;$$

$$\bar{V} = \frac{v^2}{4 \sin^2 \pi \nu} M \bar{f}_i^2 (\overline{\Delta\theta_i})^2.$$

И, наконец, учитывая выражения (11.11) и (11.12), а также то, что $\bar{\beta} = R/v$, находим

$$\bar{V} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \nu} \cdot \frac{R}{Mv} \left[\frac{n^2}{\rho^4} (\overline{\delta y})^2 + \left(\frac{\overline{\delta B}}{B} \right)^2 \right].$$

Переходя затем к первоначальной переменной, получим $\hat{y}_f^2 = \beta \hat{\eta}_f^2 = (R/v) \bar{V}$. Умножив полученную величину на форм-фактор

$$\bar{y}_f^2 = (R/v) F \bar{V},$$

найдем максимальное отклонение замкнутой орбиты, соответствующее огибающей $\beta = \beta_{\text{макс}}$.

В результате для наибольшего вероятного отклонения замкнутой орбиты в точках, где $\beta = \beta_{\text{макс}}$, получим

$$\sqrt{\bar{y}_f^2} = \langle \hat{y}_f \rangle = \frac{\pi}{|\sin \pi \nu|} \cdot \frac{|n|}{M^{1/2} v} \cdot \frac{R}{\rho} F^{1/2} \sqrt{(\overline{\delta y})^2 + \left(\frac{\rho^2}{n^2} \right)^2 \left(\frac{\overline{\delta B}}{B} \right)^2}. \quad (11.13)$$

Заметим, что если ν приближается к целому числу, то $\langle \hat{y}_f \rangle$ неограниченно возрастает. Значит, необходимо избегать целого числа бетатронных колебаний за оборот и даже чисел, близких к целым. Разумеется, эта формула справедлива при сделанных ранее предположениях.

В протонном синхротроне ЦЕРН число FD -звеньев $M = 2N$. Поскольку как F -, так и D -элемент юстируются независимо с точностью δu , то для всего FD -звена величина $\langle \hat{y}_f \rangle$ будет в $\sqrt{2}$ раз меньше. Кроме того, в прямолинейных промежутках всегда присутствует поле рассеяния $(\delta B)_{\text{п.п}}$, которым обычно нельзя пренебречь

в начале цикла ускорения. С учетом этого поля в формуле (11.13) под корнем получим (индекс «б» относится к полю в блоках)

$$\left(\frac{\delta B}{B}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\delta B}{B}\right)_б^2 + \frac{M}{M_{п. п}} \cdot \frac{R - \rho}{\rho} \left(\frac{\delta B_{п. п}}{B}\right)^2, \quad (11.13a)$$

где $M_{п. п}$ — число прямолинейных промежутков.

Величина $\langle \hat{y}_f \rangle$ представляет собой отклонение замкнутой орбиты в статистическом смысле, т. е. математическое ожидание определенного максимального отклонения замкнутой орбиты для данной машины. Распределение \hat{y}_f (индекс f опущен) подчиняется закону Релея

$$p(\hat{y}) = \frac{\hat{y}}{\langle \hat{y} \rangle^2} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\langle \hat{y} \rangle^2}}. \quad (11.14)$$

Вероятность того, что отклонение замкнутой орбиты превысит некоторую заданную величину $m\langle \hat{y} \rangle$, равна

$$p[\hat{y} > (m\langle \hat{y} \rangle)] = \int_{y=m\langle \hat{y} \rangle}^{\infty} p(\hat{y}) d\hat{y} = e^{-m^2}. \quad (11.15)$$

Отметим, кстати, что недавно Коллинз предложил способ уменьшения отклонения замкнутой орбиты посредством коррекции поля в области инжекции, где возникают наиболее критические условия. Это предложение (см. также доклад А. Л. Минца и др. [IX]) появилось после успешного сооружения и запуска электронных синхротронов в Кембридже (США) и Гамбурге. На рис. 25 показан участок коррекции, где корректирующие воздействия прикладываются в точках s_{i-1} , s_i , s_{i+1} , а $\Delta s = L$ соответствует одному звену магнитной структуры (сплошная линия — нескорректированная орбита, штрих-пунктирная — скорректированная).

В точках s_{i-1} , s_i , s_{i+1} располагается тройка корректирующих элементов, отклоняющих пучок на углы δ_{i-1} , δ_i , δ_{i+1} соответственно. При этом орбита центрируется в точке s_i , а корректирующее воздействие распространяется лишь на интервал s_{i-1} , s_{i+1} и не влияет на отклонение траектории в последующих участках. Для достижения такой коррекции необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \delta_{i-1} &= \delta_{i+1} = \delta, \\ \delta_i &= -\delta \cos \mu, \end{aligned}$$

где μ — набег фазы бетатронных колебаний на периоде фокусировки.

Исправление орбиты достигается расположением необходимого числа таких троек по периметру ускорителя.

11.4. Результаты расчетов для протонного синхротрона ЦЕРН

Разброс полей в блоках	$1,1 \cdot 10^{-3}$ при 148 гс $2,5 \cdot 10^{-4}$ при 2840 гс $5 \cdot 10^{-4}$ при 14 000 гс
Паразитные поля в прямолинейных промежутках	0,5 гс
Точность установки (каждый $F-D$ -блок юстируется независимо)	1/10 мм
Максимальное отклонение замкнутой орбиты	± 1 см в начале цикла \pm несколько миллиметров при высоких полях.

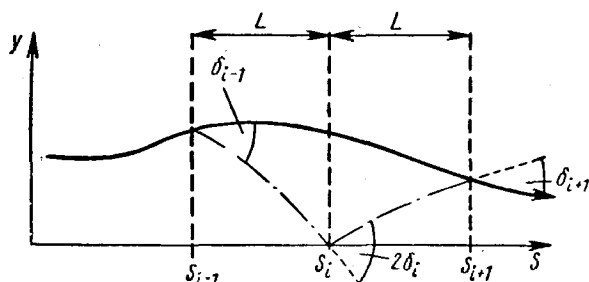


Рис. 25.

Эти данные хорошо согласуются с расчетом [формула (11.13) или (11.13а), где необходимо ввести множитель $1/\sqrt{2}$, учитывающий способ юстировки].

Глава 12 ОШИБКИ ПОКАЗАТЕЛЯ СПАДА ПОЛЯ

12.1. Метод анализа

Введение

Возмущения показателя спада δn вызывают: а) деформацию огибающей пучка; б) изменение числа бетатронных колебаний за оборот; в) появление полос неустойчивости в тех случаях, когда для невозмущенной системы число бетатронных колебаний за оборот ν_0 равно целому или полужелому числу.

Начала теории возмущений, которая здесь будет изложена, разработали Курант и Снайдер [8], а также Людерс [9].

Можно показать, что уравнения гладкого приближения для машины, содержащей возмущение δn , имеют вид

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + [F - \varphi(\theta)] y = 0, \quad (12.1)$$

где $F(\theta)$ представляет собой среднюю силу, действующую на частицу, а член $\varphi(\theta)$ — возмущения.

В качестве независимой переменной удобно использовать азимут $\theta = s/R$, а также разложение в ряд Фурье с учетом условий

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\theta) &= \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \delta n(\theta); \\ \varphi(\theta + 2\pi) &= \varphi(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Теория, которая здесь дается, частично основана на работах Бриллюэна и Пароди [10] о прохождении электронов сквозь периодическую структуру, в которой электроны подчиняются уравнению Шредингера, аналогичному уравнению (12.1):

$$\frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - eV(s)] \psi = 0.$$

Как известно, при решении этого уравнения появляются запрещенные зоны, соответствующие зонам неустойчивости в ускорителях.

Основные соотношения

Рассмотрим случай, когда возмущения, описываемые в уравнении (12.1) членом $\varphi(\theta)$, имеют первый порядок малости. Учитывая условия периодичности $\varphi(\theta)$, можно получить решения Флоке [см. уравнения (5.3)]

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= e^{i\nu\theta} p_1(\theta); \\ y^{(2)} &= e^{-i\nu\theta} p_2(\theta), \end{aligned}$$

где

$$p_{1,2}(\theta + 2\pi) = p_{1,2}(\theta).$$

Чтобы получить решения при наличии возмущений, положим

$$y = y_0 + \delta y, \quad \text{где } y_0 = e^{i\nu\theta}; \quad (12.3)$$

$$F = F_0 + \delta F, \quad \text{где } F_0 = \nu_0^2; \quad (12.4)$$

y_0 — решение нулевого приближения, а δy и δF имеют тот же порядок, что и φ .

Подставим y из выражения (12.3) и F из выражения (12.4) в уравнение (12.1) и пренебрежем членами второго порядка, т. е. произведе-

дениями $\varphi \delta y$, $y \delta F$ и $\varphi \delta F$. В этом случае для δy

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} (y_0 + \delta y) + (F_0 + \delta F - \varphi) (y_0 + \delta y) &= 0; \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \delta y + F_0 \delta y + (\delta F - \varphi) y_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Решение первого приближения (12.1) обозначим

$$y_1 = y_0 + \delta y. \quad (12.6)$$

Нахождение первого приближения

Интеграл уравнения (12.5) получим, разлагая в ряды Фурье исследуемую функцию $\delta y(\theta)$, возмущение $\varphi(\theta)$ и приравнявая коэффициенты. Получаемые при этом интегралы $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ представляются в виде рядов, в частности

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= e^{i\nu\theta} p_1(\theta) = e^{i\nu\theta} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i r \theta} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_r e^{i(\nu-r)\theta} = e^{i\nu\theta} + \sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} c_r e^{i(\nu-r)\theta}, \end{aligned}$$

и для первого приближения $y^{(1)} = y_0^{(1)} + \delta y^{(1)}$.

Следовательно,

$$\delta y^{(1)} = \sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} c_r e^{i(\nu-r)\theta} \quad (12.7)$$

и остается найти лишь коэффициенты c_r .

Разложим далее в ряд Фурье возмущение

$$\varphi(\theta) = \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\theta + b_s \sin s\theta) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_s e^{-i s \theta} + \alpha_s^* e^{i s \theta}), \quad (12.8)$$

где

$$\alpha_s = a_s + i b_s, \quad \alpha_s^* = a_s - i b_s, \quad (12.8a)$$

$$|\alpha_s| \ll 1. \quad (12.8b)$$

Подставляя выражения (12.7) и (12.8) в уравнение (12.5), для каждого члена получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} (\delta y^{(1)}) &= - \sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} (\nu-r)^2 c_r e^{i(\nu-r)\theta}; \\ F_0 \delta y^{(1)} &= \sum_{\substack{-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} \nu_0^2 c_r e^{i(\nu-r)\theta}; \end{aligned}$$

$$(\delta F - \Phi) y_0^{(1)} = \left[\delta F - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r e^{-i r \theta} + \alpha_r^* e^{i r \theta}) \right] e^{i \nu \theta},$$

что при подстановке этих выражений в уравнения (12.5) дает

$$\sum_{\substack{\infty \\ r \neq 0 \\ -\infty}} [(v_0^2 - (v - r)^2] c_r e^{i(v-r)\theta} + \\ + \left[\delta F - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r e^{-i r \theta} + \alpha_r^* e^{i r \theta}) \right] e^{i \nu \theta} = 0.$$

Поделим далее все члены на $e^{i \nu \theta}$

$$\sum_{\substack{\infty \\ r \neq 0 \\ -\infty}} r(2v - r) c_r e^{-i r \theta} + \delta F - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r e^{-i r \theta} + \alpha_r^* e^{i r \theta}) = 0,$$

затем помножим их на $e^{\pm i k \theta}$, где k соответственно равно 1, 2, 3...

При последовательном интегрировании каждого уравнения на интервале $0 < \theta < 2\pi$ ненулевые интегралы получаются лишь при $r = k$.

Решая каждое уравнение относительно c_r , находим

$$c_r = \frac{\alpha_r}{2r(2v - r)}; \quad (12.9)$$

$$c_{-r} = \frac{-\alpha_r^*}{2r(2v + r)}. \quad (12.10)$$

Подставляя выражения (12.9) в формулу (12.7), получаем при $v \neq r/2$ частное решение уравнения возмущенного движения (12.1):

$$y_1^{(1)} = e^{i \nu \theta} + \sum_{r=1}^{\infty} (c_r e^{i(v-r)\theta} + c_{-r} e^{i(v+r)\theta}). \quad (12.11)$$

Аналогичным образом

$$y_1^{(2)} = e^{-i \nu \theta} + \sum_{r=1}^{\infty} (c_r^* e^{-i(v-r)\theta} + c_{-r}^* e^{-i(v+r)\theta}). \quad (12.12)$$

12.2. Изменение огибающей

Детерминированные возмущения

В равенствах (12.11) и (12.12) можно пренебречь всеми членами, кроме членов c_r [см. выражения (12.9)], для которых

$$r \approx 2v. \quad (12.13)$$

Возьмем возмущение в виде

$$\varphi = \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \delta n = a_r \cos r\theta, \quad (12.14)$$

где v таково, что выполняется условие (12.13).

Тогда

$$c_r = c_r^* = \frac{\alpha_r}{2r(2v-r)} \approx \frac{\alpha_r}{4v^2 - r^2}, \quad)$$

поскольку $4v^2 - r^2 = (2v+r)(2v-r) \approx 2r(2v-r)$.

Следовательно, траектории, описываемые уравнениями (12.11) и (12.12), при наличии возмущения запишутся в виде:

$$y^{(1)} = e^{i v \theta} \left(1 + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} e^{-i r \theta} \right);$$

$$y^{(2)} = e^{-i v \theta} \left(1 + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} e^{i r \theta} \right);$$

$$1/2 (y^{(1)} + y^{(2)}) = \cos v\theta \left(1 + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} \cos r\theta \right) + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} \sin v\theta \cos r\theta;$$

$$1/2 (y^{(1)} - y^{(2)}) = \sin v\theta \left(1 + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} \cos r\theta \right) + \frac{a_r}{4v^2 - r^2} \cos v\theta \sin r\theta.$$

В точках экстремума для огибающей пучка имеем

$$\cos r\theta = \pm 1. \quad (12.15a)$$

Этим экстремумам соответствует $(y_e)_{\text{экстр}} = 1 \pm a_r/(4v^2 - r^2)$ и приращение экстремальных значений огибающей для пучка с заданным эмитансом

$$\left(\frac{\delta y_e}{y_e} \right)_{\text{экстр}} = \pm \frac{a_r}{4v^2 - r^2}. \quad (12.15b)$$

Возмущения, заданные статистически

Довольно часто для системы магнитных блоков ускорителя задается только среднеквадратичная ошибка и функция корреляции ошибок. Оценим величины коэффициентов Фурье в этом случае.

Разделим окружность машины на M областей равной длины, так чтобы каждая область содержала в себе магнитный блок и прямолинейный промежуток. Заранее предположим, что в каждой области возмущение $\delta n_i (i = 1, \dots, M)$ постоянно. В этом случае $\delta n(\theta)$ представляет собой ступенчатую функцию и, следовательно, легко вычислить средний квадрат.

В равенстве (12.8)

$$\varphi = \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \delta n = \frac{1}{2} \left(\sum_s \alpha_s e^{-i s \theta} + \alpha_s^* e^{i s \theta} \right)$$

коэффициенты α_s гармоник с номерами $1 \leq s \leq M/2$ априори равны друг другу, а гармониками с номерами $s > M/2$ можно пренебречь. Следовательно, среднее по ансамблю машин

$$\overline{\alpha_s \alpha_s^*} \approx \begin{cases} \alpha \alpha^*, & \text{если } 1 \leq s \leq M/2; \\ 0, & \text{если } s > M/2, \end{cases}$$

откуда

$$\overline{\varphi^2} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^4 \overline{(\delta n)^2} = \frac{1}{2} \sum_s \overline{\alpha_s \alpha_s^*} = \frac{M}{4} \alpha \alpha^*,$$

и

$$|\alpha| = \frac{2}{M^{1/2}} \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \sqrt{\overline{(\delta n)^2}}.$$

Если возмущение δn_i относится только к магнитному блоку, а в прямолинейном промежутке считается равным нулю, то, как нетрудно убедиться, в этом случае

$$|\overline{\alpha_i}| = |\overline{\alpha_h}| = |\alpha| \approx \frac{2}{M^{1/2}} \cdot \frac{R}{\rho} \sqrt{\overline{(\delta n)^2}}. \quad (12.16)$$

Положим затем, что $2\nu = r + 1/2$, т. е. величина 2ν заключена между двумя целыми числами r и $r + 1$, как бывает обычно в конкретных случаях. Тогда [см. выражение (12.9)]

$$|c_r| \approx \frac{|\alpha_r|}{2\nu}.$$

В результате для случая статистически заданных возмущений

$$|\overline{c_r}| = |\overline{c_{r+1}}| = \frac{|\alpha|}{2\nu} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{1}{M^{1/2}} \cdot \frac{R}{\rho} \sqrt{\overline{(\delta n)^2}}.$$

При учете двух резонансных гармоник возмущения поля уравнения траектории (12.11) и (12.12) принимают вид

$$y = \frac{\sin}{\cos} \nu \theta \{1 \pm |c_r| [\cos(r\theta + \varphi_r) + \cos(r\theta + \varphi_{r+1})]\},$$

а для огибающей получаем

$$\left(\frac{\delta y_e}{y_e}\right) = \pm |c_r| [\cos(r\theta + \varphi_r) + \cos(r\theta + \varphi_{r+1})].$$

Изменение экстремума огибающей при всевозможных значениях фаз φ_r и φ_{r+1} будет равно в среднем

$$\left(\frac{\delta y_e}{y_e}\right)_{\text{экстр}} = \pm \frac{4}{\pi} |c_r| = \pm \frac{4}{\pi} \cdot \frac{|n|}{M^{1/2}} \cdot \frac{R}{\nu \rho} \sqrt{\overline{\left(\frac{\delta n}{n}\right)^2}}. \quad (12.17)$$

Протонный синхротрон ЦЕРН

В протонном синхротроне ЦЕРН $M = 200$; $n = 228$; $\left\langle \frac{\delta n}{n} \right\rangle = 0,1\%$; $R/\rho = 1,41$; $\nu = 6,25$.

Используя формулу (12.7), получаем

$$\left\langle \frac{\delta y_{\text{огиб}}}{y_{\text{огиб}}} \right\rangle \approx 3,7 \cdot 10^{-2}.$$

12.3. Изменение числа бетатронных колебаний за один оборот

В отсутствие возмущений число бетатронных колебаний машины за один оборот $\nu_0 = \sqrt{F_0}$. Оценим смещение $\delta\nu = \nu - \nu_0$ при наличии возмущения δn . Вернемся к уравнению (12.1)

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + (F - \varphi)y = 0.$$

Умножим его на $e^{-i\nu\theta}$ и проинтегрируем на интервале от 0 до 2π :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} \frac{d^2 y}{d\theta^2} d\theta + \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} (F - \varphi) y d\theta = 0.$$

Затем дважды проинтегрируем первое слагаемое по частям:

$$\begin{aligned} I &= \left[e^{-i\nu\theta} \frac{dy}{d\theta} \right]_0^{2\pi} + i\nu \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} \frac{dy}{d\theta} d\theta = \\ &= \left[e^{-i\nu\theta} \frac{dy}{d\theta} \right]_0^{2\pi} + i\nu [e^{-i\nu\theta} y]_0^{2\pi} - \nu^2 \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} y d\theta. \end{aligned}$$

Две первые скобки равны нулю, оставшая же часть дает решение Флоке вида $y = e^{-i\nu\theta} p(\theta)$, где $p(\theta + 2\pi) = p(\theta)$.

Рассмотрим далее равенство

$$(F_0 - \nu^2) \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} y d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\theta} \varphi y d\theta,$$

из которого, учитывая, что

$$y = y_0 + \delta y = e^{i\nu\theta} + \delta y$$

и

$$\int_0^{2\pi} \varphi d\theta = 0,$$

получим соотношение:

$$(F_0 - v^2) \int_0^{2\pi} (1 + e^{-i v \theta} \delta y) d\theta = \int_0^{2\pi} (e^{-i v \theta} \varphi \delta y) d\theta.$$

Подставим теперь δy из формулы (12.7) и φ из формулы (12.8):

$$\begin{aligned} & (F_0 - v^2) \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r e^{-ir\theta} + c_{-r} e^{ir\theta} \right] d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_s e^{-is\theta} + \alpha_s^* e^{is\theta}) \right] \left[\sum_{r=1}^{\infty} (c_r e^{-ir\theta} + c_{-r} e^{ir\theta}) \right] d\theta; \\ & 2\pi (F_0 - v^2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} (\alpha_r c_{-r} + \alpha_r^* c_r) d\theta. \end{aligned}$$

Так как ненулевые интегралы получаются лишь в случае постоянных членов, то

$$\begin{aligned} F_0 - v^2 = v_0^2 - v^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_r|^2}{2r(2v-r)} - [\text{выражение (12.9)}] - \frac{|\alpha_r|^2}{2r(2v+r)} \right), \\ v^2 &\approx v_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|\alpha_r|^2}{4v^2 - r^2}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Смещение δv связано с существованием фокусировки в системе с переменным градиентом. В самом деле, возьмем уравнение траектории

$$d^2 y / d\theta^2 + (F - \varphi) y = 0,$$

где $\varphi = a_r \cos r\theta$, $\alpha_r = a_r$ [см. выражение (12.8a)], и рассмотрим случай, когда $2v \ll r$. Если $\varphi = 0$, то частота бетатронных колебаний $v_0 = \sqrt{F_0}$. При $\varphi \neq 0$ из равенства (12.18) получаем

$$v^2 = v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_r^2}{r^2},$$

что находится в согласии с формулой (9.18), учитывающей влияние гармонического изменения фокусирующей силы.

12.4. Запрещенные полосы

Величина F_0 относится к машине без возмущения δl . Она выражается через параметры идеальной машины и, вообще говоря, является известной величиной. В идеальной машине частоты бетатронных колебаний равны $v_{0x} = \sqrt{F_{0x}}$, $v_{0z} = \sqrt{F_{0z}}$. В частности, может получиться $v_0 = r/2$, если $F_0 = (r/2)^2$, а r — целое число.

Рассмотрим теперь машину, в которой имеется возмущение δn , причем последнее при разложении в ряд Фурье характеризуется коэффициентами α_r согласно формуле (12.8).

В этом случае, когда F_0 близко к $(r/2)^2$, где r — целое число, можно выделить две характерные величины $(F_0)_1 = F_0 - \delta F_0$ и $(F_0)_2 = F_0 + \delta F_0$; $\delta F_0 = \frac{|\alpha_r|}{2}$. В окрестности F_0 во всем диапазоне шириной $2\delta F_0$ частота бетатронных колебаний постоянна и равна $\nu = r/2 = \nu_0$. Сама траектория, однако, в этом случае не ограничена, поскольку она имеет вид $y = e^{\pm(a + i\nu_0)\theta} p(\theta)$ и a — действительное число, т. е. получается тот случай, когда одно из решений Флоке неустойчиво (не ограничено).

На концах диапазона $(F_0)_{1,2} = (r/2)^2 \pm \delta F_0$ существуют устойчивые решения

$$y = e^{\pm i\nu_0\theta} p(\theta). \quad (12.19a)$$

Для доказательства напомним заново уравнение (12.5) для δy , перегруппировав его члены:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\delta y) + F_0(\delta y) = (-\delta F + \varphi)y_0. \quad (12.5a)$$

Положим, как и ранее, в первом приближении $y_0 = e^{\pm i\nu_0\theta}$, $F_0 = \nu_0^2$ [см. выражения (12.3) и (12.4)].

Уравнение (12.5a) является линейным и неоднородным. Его решение ограничено при условии, что решение δy_0 однородного уравнения ортогонально правой части неоднородного уравнения, т. е.

$$\int_0^{2\pi} (\delta y)_0 (-\delta F + \varphi) y_0 d\theta = 0. \quad (12.20)$$

Так как $(\delta y)_0 = e^{\pm i\sqrt{F_0}\theta} = e^{\pm i\nu_0\theta}$ и $\nu_0 = r/2$, то

$$(\delta y)_0 = e^{\pm i\frac{r}{2}\theta}. \quad (12.21)$$

Напишем далее

$$y_0 = C_1 e^{-i\nu_0\theta} + C_2 e^{+i\nu_0\theta} = C_1 e^{-i\frac{r}{2}\theta} + C_2 e^{+i\frac{r}{2}\theta}. \quad (12.22)$$

Используем разложение в ряд (12.8):

$$\varphi = 1/2 \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_s e^{-is\theta} + \alpha_s^* e^{is\theta}).$$

При этом условии ортогональности (12.20) запишется следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i\frac{r}{2}\theta} \left[-\delta F + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_s e^{-is\theta} + \alpha_s^* e^{is\theta}) \right] \times \\ \times \left(C_1 e^{-i\frac{r}{2}\theta} + C_2 e^{+i\frac{r}{2}\theta} \right) d\theta = 0.$$

Поскольку ненулевые интегралы получаются лишь от постоянных членов, то

$$-C_1 \delta F + 1/2 C_2 \alpha_r = 0;$$

$$-C_2 F + 1/2 C_1 \alpha_r^* = 0;$$

$$(\delta F)^2 = \frac{\alpha_r \alpha_r^*}{4};$$

$$\delta F = \pm \frac{|\alpha_r|}{2}.$$

Следовательно, уравнение (12.1) при наличии возмущения показателя спада поля $\varphi = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 \delta n$ имеет устойчивые решения Флоке,

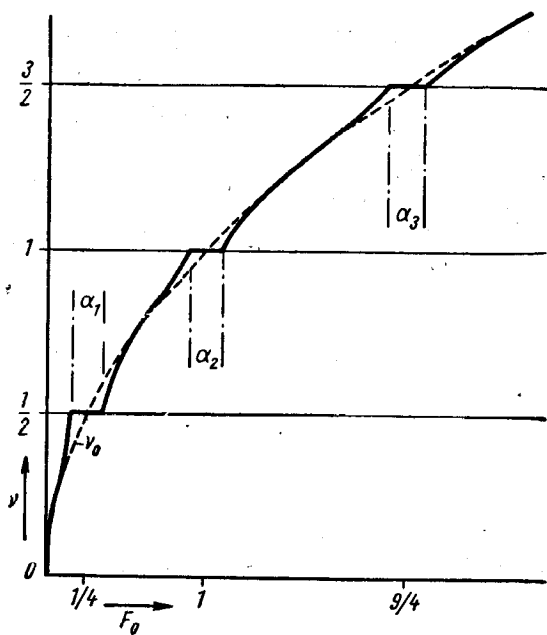


Рис. 26.

если $\nu = r/2 (r = 1, 2, \dots)$ и $F_0 = (r/2)^2 \pm |\alpha_r|/2$. В интервале $(r/2)^2 - |\alpha_r|/2 < F_0 < (r/2)^2 + |\alpha_r|/2$ решения неустойчивы.

На рис. 26 приведена зависимость $\nu(F_0)$, показывающая появление полос неустойчивости. Пунктиром обозначена соответствующая функция $\nu_0 = \sqrt{F_0}$ для идеальной машины.

Напомним, что F_0 представляет собой фокусирующую силу в идеальной машине.

Глава 13

СОГЛАСОВАННЫЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Основные требования к длинным прямолинейным промежуткам

Рассмотрим прямолинейный промежуток, введенный в обычную магнитную систему ускорителя так, что он не влияет на огибающую пучка. Это означает, что матрицу рассматриваемого промежутка можно записать в виде

$$L = \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\gamma \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

причем величины трех коэффициентов α , β , γ в крайних точках те же, что и для регулярного звена идеальной машины. Сдвиг фазы бетатронных колебаний в прямолинейной секции L — величина произвольная. Коэффициенты α , β , γ на концах промежутка L — суть коэффициенты периодической структуры, образованной бесконечной последовательностью L -секций. Условие идентичности коэффициентов, разумеется, имеет место как для оси x , так и для оси z .

Сдвиг частот бетатронных колебаний, обусловленный прямолинейными промежутками

Можно написать, что

$$L = I \cos \varphi + J \sin \varphi, \quad (13.2)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix},$$

и пусть далее

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu \quad (13.3)$$

обозначает матрицу обычного звена идеальной машины без длинных прямолинейных промежутков. Пусть также a есть число нормальных периодов между прямолинейными промежутками. Матрица секции магнита, содержащей a нормальных периодов, равна M^a . Матрица же суперпериода, в который входит прямолинейный промежуток,

$$M_s = LM^a = I \cos(\varphi + a\mu) + J \sin(\varphi + a\mu). \quad (13.4)$$

Следовательно, при наличии длинных прямолинейных промежутков фаза бетатронных колебаний изменяется на величину $\varphi + a\mu$ вместо $a\mu$.

Согласованные прямолинейные промежутки с двумя квадрупольями. Случай тонких линз

Рассмотрим длинный прямолинейный промежуток, показанный на рис. 27, где поперечной координатой является ось x . Этот промежуток содержит два симметрично расположенных квадруполья — фокусирующий и дефокусирующий, — которые можно представить как тонкие линзы толщиной $\Delta s = l$. Матрицы этих квадрупольей

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Kl & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Kl & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.5)$$

где

$$K = \left| \frac{e}{p} \text{grad } B \right|; \quad Kl = |1/f|. \quad (13.6)$$

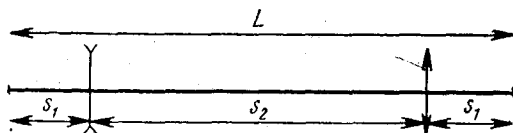


Рис. 27.

Матрица длинного прямолинейного промежутка

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Kl & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Kl & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\gamma \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Параметры s_1 , s_2 и Kl можно выразить посредством введенных ранее коэффициентов α , β , γ и φ . Сравнивая следы матриц, получаем

$$\cos \varphi = 1 - (Kl)^2 s_1 s_2, \quad (13.8)$$

а приравнивая элементы L_{11} :

$$\cos \varphi + \alpha \sin \varphi = 1 + Kl s_2 - K^2 l^2 s_1 s_2,$$

откуда

$$\alpha \sin \varphi = Kl s_2. \quad (13.9)$$

Приравняв элементы L_{21} , найдем

$$-\gamma \sin \varphi = - (Kl)^2 s_2. \quad (13.10)$$

Из двух последних равенств определяется

$$Kl = \gamma/\alpha \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{\alpha^2}{\gamma} \sin \varphi. \quad (13.11)$$

Учитывая уравнение (13.8), находим

$$s_1 = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Иногда в прямолинейном промежутке используется лишь секция s_2 . При необходимости сделать ее как можно большей следует выбрать $\theta \approx \pi/2$. При этом условии получаются следующие соотношения для прямолинейных промежутков (см. рис. 27):

$$s_2 = \frac{\alpha^2}{\gamma}; \quad s_1 = \frac{1}{\gamma}; \quad Kl = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad (13.12)$$

где α , β , γ — коэффициенты матрицы магнитной структуры без прямолинейных промежутков.

Вертикальная плоскость

В вертикальной плоскости длины s_1 и s_2 остаются теми же, а величина K меняет свой знак.

Условия (13.11) и (13.12) удовлетворяются одновременно по двум координатам, если структура прямолинейного промежутка такова, что выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} \alpha_z &= -\alpha_x; \\ \beta_z &= \beta_x \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

и, как следствие, $\gamma_z = \gamma_x$ (напомним, что $\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$).

В FD -звене, которое может содержать также прямолинейный промежуток O , имеются две точки, удовлетворяющие условию (13.13); расположены они на стыках FD — DF -звеньев. В этих точках

$$\beta_z = \beta_x \approx \bar{\beta} \quad \text{и} \quad \alpha_z = -\alpha_x = \alpha_M.$$

В магнитах с переменным градиентом, как правило, $\alpha_M \approx 2$, и, значит, $s_2 \approx 4 \div 5s_1$.

Случай толстых линз

Реальные линзы, вообще говоря, не всегда можно считать тонкими. Рассмотрим соотношение (13.7) с учетом толщины линз:

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K}l & (1/\sqrt{K}) \sin \sqrt{K}l \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K}l & \cos \sqrt{K}l \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch} \sqrt{K}l & (1/\sqrt{K}) \text{sh} \sqrt{K}l \\ \sqrt{K} \text{sh} \sqrt{K}l & \text{ch} \sqrt{K}l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\gamma \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Для того чтобы приравнять коэффициенты, разложим тригонометрические функции в ряды с точностью до 4-го порядка. В этом приближении, учитывая предположение (13.12а),

$$\left. \begin{aligned} s_1' &= \frac{1}{\gamma} - \frac{l}{3} - \frac{\gamma l^2}{6\alpha^2}; \\ s_2' &= \frac{\alpha^2}{\gamma} - \frac{4}{3}l; \\ K'l &= \frac{\gamma}{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma l}{3\alpha^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Численный пример

Для структуры FOFODODO (без длинных прямолинейных промежутков) при $\mu = 4,1$, $N = 84$, $\nu = 10,25$, $p_0 = 60$ Гэв/с, $R = 254$ м в середине звена FOD или DOF имеем $\beta = 23,6$ м $\approx \bar{\beta}$, $\alpha = 1,89$, $\gamma = 0,195$ м⁻¹.

Для длинных прямолинейных промежутков в этом случае получаем $s_2 = 14,6$ м, $s_1 = 4,2$ м, $\gamma = 2,86$ м, $\text{grad}B = 8$ тл/м. При этом прямолинейный промежуток начинается в центре O-секции, длины s' ограничиваются краями квадрупольей, число же таких промежутков, вообще говоря, может быть любым.

Можно показать, что введение в указанную систему несогласованного длинного прямолинейного промежутка приводит к увеличению огибающей пучка на 16%. Согласование длинных прямолинейных промежутков имеет смысл, когда длина последних намного больше длины волны бетатронных колебаний. В реальной системе прямолинейные промежутки могут состоять из нескольких элементарных единиц типа рассмотренных выше, но могут содержать также и другие элементы магнитной оптики.

Искажение замкнутой орбиты

Прямолинейный согласованный промежуток не изменяет огибающую траекторий с равновесным импульсом $p = p_0$, однако для $p \neq p_0$ замкнутая орбита изменяется.

Отклонение замкнутой орбиты можно найти, используя матрицу перехода, содержащую три строки и три столбца. Координаты x , x' замкнутой орбиты принимают одни и те же значения через каждый суперпериод. Эти значения можно определить, решая уравнение

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = M_s \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}. \quad (13.16)$$

Матрица, учитывающая дисперсию, имеет форму

$$T = \left(\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} m_{13} \\ m_{23} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right), \quad (13.17)$$

где M означает обычную матрицу размерности 2×2 .

Можно показать, что матрица типа T удовлетворяет следующему правилу перемножения:

$$TT' = \left(\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix} m_{13} \\ m_{23} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M' & \begin{matrix} m'_{13} \\ m'_{23} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} MM' & M \begin{pmatrix} m'_{13} \\ m'_{23} \end{pmatrix} + I \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right). \quad (13.18)$$

Рассмотрим далее случай, когда имеется a_1 нормальных периодов магнита, длинный прямолинейный промежуток и a_2 нормальных периодов, так что $a_1 + a_2 = a$.

Используя формулу (13.18), получаем

$$M_s = \left(\begin{array}{c|c} M^{a_2} & \begin{matrix} \sum_{k=1}^{a_2-1} M^k \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} J & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M^{a_1} & \begin{matrix} \sum_{k=0}^{a_1-1} M^k \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right). \quad (13.19)$$

Центральная матрица соответствует здесь длинному прямолинейному промежутку; в ней содержится матричный минор J , и, так как для последнего полагалось $\varphi = \pi/2$, то $J \cos \varphi + J \sin \varphi = J$.

При перемножении трех матриц с учетом (13.18)

$$M_s = \left(\begin{array}{c|c} JM^a & Y \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right). \quad (13.20)$$

Используем также тот факт, что $M^{a_1} J M^{a_2} = J M^a$, так как матрицы J и $M = I \cos \mu + J \sin \mu$ коммутируют. Для преобразования матрицы

$$Y = M^{a_2} J \sum_{k=0}^{a_1-1} M^k + \sum_{k=0}^{a_2-1} M^k$$

используем соотношение

$$\sum_{k=0}^{a_1-1} M^k = I + M + M^2 + \dots + M^{a_1-1} = \frac{M^{a_1} - I}{M - I},$$

т. е.

$$Y = (M - I)^{-1} [J M^a - I + M^{a_2} (I - J)]. \quad (13.21)$$

Полученное выражение для матрицы M_s подставим в уравнение (13.20) и (13.16):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} &= JM^a \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \frac{\Delta p}{p} Y \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \\
 &= JM^a \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \frac{\Delta p}{p} \left(\frac{JM^a - I + M^{a_2} (I - J)}{M - I} \right) \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \\
 &= -(JM^a - I)^{-1} \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{JM^a - I + M^{a_2} (I - J)}{M - I} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{-\Delta p}{p} \cdot \frac{I}{M - I} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} - \frac{\Delta p}{p} \cdot \frac{(JM^a - I)^{-1} (I - J) M^{a_2}}{M - I} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Первый член в последней строке дает координаты x_0, x'_0 замкнутой орбиты в отсутствие длинных прямолинейных промежутков

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \frac{-\Delta p}{p} \cdot \frac{I}{M - I} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}. \quad (13.22)$$

Это выражение присутствует в качестве множителя и во втором члене. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + (JM^a - I)^{-1} (I - J) M^{a_2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

или, вводя вектор приращения, обусловленного длинным промежутком,

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = (JM^a - I)^{-1} (I - J) M^{a_2} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}. \quad (13.23)$$

Выразим отклонение Δx замкнутой орбиты, используя соотношение (13.23) и подставляя конкретные матричные элементы. Так как $M = I \cos \mu + J \sin \mu$ и $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$, то в результате тригонометрических преобразований

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha \mu}{2} \right)} \left\{ \left[\cos \left(a_2 \mu - \frac{a \mu}{2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \alpha \sin \left(a_2 \mu - \frac{a \mu}{2} \right) \right] x_0 + \beta \sin \left(a_2 \mu - \frac{a \mu}{2} \right) x'_0 \right\}. \quad (13.24)
 \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках $\{(\cos \xi + \alpha \sin \xi) x_0 + (\beta \sin \xi) x'_0\}$ имеет экстремум относительно ξ при

$$\operatorname{tg} \xi = \alpha + \beta \frac{x'_0}{x_0} \approx 0,$$

если учесть, что $\alpha = -1/2\beta'$ и приближенно $x_0 = \sqrt{\beta}$, т. е. экстремум достигается при $\xi = 0$, откуда $a_2 = a/2$ и $\{ \}_e \approx x_0$. Следовательно, отклонение Δx замкнутой орбиты достигает экстремума

в середине между двумя длинными прямолинейными промежутками и в этом случае

$$\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)_e = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\mu'/s)}, \quad (13.25)$$

где $\mu' = \pi/2 + a\mu$ — приращение фазы бетатронных колебаний за суперпериод; резонансы, естественно, получаются при $\mu' = k$.

В рассмотренном длинном согласованном прямолинейном промежутке распределения частиц в фазовом пространстве на выходе и на входе совпадают лишь для одного значения энергии.

Недавно были предложены длинные прямолинейные промежутки, в которых согласование происходит во всем диапазоне энергий пучка. Накаш [4] предложил поместить три согласованных прямолинейных промежутка последовательно, причем каждый такой промежуток должен обеспечить смещение фазы бетатронных колебаний на $2\pi/3$. В такой системе для всех энергий пучка распределения частиц на входе и на выходе совпадают.

Глава 14

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ПУЧКА ПРОТОНОВ НА ОСТАТОЧНОМ ГАЗЕ

14.1. Случай широкой вакуумной камеры

Общие соображения. Известно, что упругие взаимодействия ускоряемого пучка протонов с остаточным газом приводят в основном к рассеянию пучка и потере частиц, особенно в начале цикла, когда энергия частиц по отношению к их энергии в момент инжекции возрастает по квадратичному закону*. Нерелятивистской теорией рассеяния можно пользоваться для начальных энергий порядка 50 Мэв. Для больших энергий рассеяние частиц существенно уменьшается, по крайней мере для давления в камере, не превышающего 10^{-5} мм рт. ст.

Предположим, что остаточный газ не содержит каких-либо ионов, за исключением пучка протонов. Такое предположение вполне обоснованно, так как процесс ионизации происходит достаточно медленно и образующиеся положительные ионы и электроны быстро выходят из рабочей области. Положительные ионы оседают на стенках вследствие электростатического отталкивания, а электроны получают очень сильный импульс в процессе ионизации. Предположим также, что плотность отрицательных ионов достаточно мала по сравнению с плотностью протонов в пучке.

Задача о рассеянии пучка формально относится к классу задач о возмущении колебаний шумом и, вообще говоря, может быть решена различными методами. В этой главе описывается метод, основанный на работе [15].

* Для нерелятивистских значений энергии инжекции. — Прим. ред.

Параметры единичного столкновения

Прежде чем перейти к квантовому рассмотрению, вспомним классический анализ столкновения по Резерфорду, который лишь приближенно соответствует действительности. Для протона, имеющего нерелятивистскую скорость ($\gamma \approx 1$, $\beta \gg 1$) и пролетающего в кулоновском поле неподвижного иона с зарядом Ze , угол отклонения, если он достаточно мал, составляет

$$\delta\theta \approx \frac{2Zr_p}{b\gamma\beta^2} \approx \frac{Zr_p}{b} \cdot \frac{E_0}{T} \quad (14.1)$$

(второе равенство справедливо лишь в нерелятивистском случае), где Z — заряд протона; b — параметр столкновения или прицель-

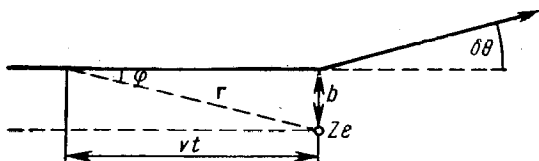


Рис. 28.

ное расстояние; $E_0 = 0,938 \cdot 10^9$ эв; T — кинетическая энергия протона; $r_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_p c^2} = 1,5 \cdot 10^{-18}$ м — «классический радиус» протона.

Соотношение (14.1) можно доказать следующим образом. Поперечная составляющая импульса Δp_{\perp} , которая передается от движущегося протона неподвижному ядру остаточного газа

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\perp} dt,$$

где

$$f_{\perp} = \frac{Z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \sin \varphi.$$

Выразим r и t через угол φ (рис. 28). Сплошная линия — траектория протона, налетающего на ядро Ze , $r = b/\sin \varphi$; $b/vt = \tan \varphi$, так что

$$\Delta p_{\perp} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{bv} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{bv}.$$

Учитывая, что $p = m_p \gamma v$, в результате имеем

$$\delta\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{b\gamma m_p v^2},$$

что совпадает с равенством (14.1).

Эффективное сечение, для которого протон имеет прицельное расстояние, заключенное между b и db , по определению равно $d\delta = 2\pi b db$. Эффективное сечение отклонения на угол, заключенный между b и $(b + db)$,

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{db} \cdot \frac{db}{d\delta\theta} d\delta\theta;$$

учитывая равенства (14.1), получаем

$$\frac{d\sigma}{d\delta\theta} = 2\pi \left(\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta)^3} = 2\pi \left(\frac{Zr_p E_0}{T} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta)^3}, \quad (14.2)$$

т. е. формулу Резерфорда для малых углов. Полное эффективное сечение рассеяния

$$\sigma = \int_{\delta\theta_m}^{\delta\theta_M} \frac{d\sigma}{d\delta\theta} d\delta\theta = \pi \left(\frac{2Zr_p}{\beta^2} \right)^2 \left[\frac{1}{(\delta\theta_m)^2} - \frac{1}{(\delta\theta_M)^2} \right].$$

Максимальное и минимальное значения $\delta\theta$ зависят от размеров атома. Далее будет видно, что $(\delta\theta_m)^2 \ll (\delta\theta_M)^2$ и, значит,

$$\sigma = \pi \left(\frac{2Zr_p r_p}{\beta^2} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta_m)^2} = \pi \left(\frac{Zr_p E_0}{T} \right)^2 \frac{1}{(\delta\theta_m)^2}. \quad (14.3)$$

Вероятность рассеяния на угол, заключенный между $\delta\theta$ и $\delta\theta + d\delta\theta$,

$$p(\delta\theta) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\delta\theta} = 2 (\delta\theta_m)^2 \frac{1}{(\delta\theta)^3},$$

так что

$$\overline{(\delta\theta)^2} = \int_{\delta\theta_m}^{\delta\theta_M} (\delta\theta)^2 p(\delta\theta) d\delta\theta = 2 (\delta\theta_m)^2 \ln \frac{\delta\theta_M}{\delta\theta_m}. \quad (14.4)$$

Угол $\delta\theta$ между направлениями движения частицы до и после рассеяния имеет две компоненты $\delta x'$ и $\delta z'$. Очевидно, $(\delta\theta)^2 = (\delta x')^2 + (\delta z')^2$ и из соображений симметрии $\overline{(\delta x')^2} = \overline{(\delta z')^2} = 1/2 \overline{(\delta\theta)^2}$.

Обозначая далее $\delta y'$ одну из величин $\delta x'$ и $\delta z'$, напишем, что

$$\overline{(\delta y')^2} = 1/2 \overline{(\delta\theta)^2}. \quad (14.5)$$

При описании рассеяния пучка важную роль играет произведение $\sigma \cdot \overline{(\delta y')^2}$, т. е. произведение эффективного сечения рассеяния на средний квадрат одной из составляющих отклонения. Из формул (14.3) и (14.5) находим

$$\sigma \cdot \overline{(\delta y')^2} = \pi \left(\frac{Zr_p E_0}{T} \right)^2 \ln \frac{\delta\theta_M}{\delta\theta_m}. \quad (14.6)$$

В этих формулах используется классическая механика и величинам $\delta\theta_m$ и $\delta\theta_M$ соответствуют характерные параметры: радиус a рассеивающего атома и радиус r_N ядра этого атома.

В квантовом рассмотрении оказывается, что формула Резерфорда приближенно выполняется при рассеянии нерелятивистских протонов, причем для предельных углов имеют место следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta_m &= \frac{\lambda_0}{a}; \\ \delta\theta_M &= \frac{\lambda_0}{r_N}, \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

где λ_0 — длина волны де Бройля для рассеиваемого протона (деленная на 2π):

$$\lambda_0 = \frac{h}{p}; \quad (14.8)$$

$a = 5,3 \cdot 10^{-11} z^{-\frac{1}{3}}$ м — радиус рассеивающего атома; $r_N = 1,6 \times 10^{-15} A^{\frac{1}{3}}$ м — радиус ядра рассеивающего атома. В то же время в вакуумной камере, имеющей полуширину Y , максимально допустимый угол многократного рассеяния, при котором частицы еще выпадают на стенку,

$$(\delta\theta_M)_{\text{кам}} \approx \frac{vY}{R}. \quad (14.9)$$

Мольер [Z. Naturforsch, 2a, 133 (1947)] получил формулу для рассеяния на атоме с потенциалом, удовлетворяющим условию Ферми—Томаса. На основе этой работы Курант [R. S.I., 24 (1953), 836] нашел выражение более точное, чем (14.6):

$$\sigma \overline{(\delta y')^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{Z r_p E_0}{T} \right)^2 \left(\ln \frac{(\theta_M)_{\text{кам}}^2}{\lambda_\gamma^2} - 1 \right), \quad (14.10)$$

где

$$\chi_\gamma = 1,20 \delta\theta_m (1 + 3,33\gamma^2)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{Z}{137\beta}. \quad (14.11)$$

Если проинтегрировать уравнение (14.10) по переменной T и в качестве начального значения взять T_{inj} , то получим

$$\sigma \overline{(\delta y')^2} = \left(\frac{T_{inj}}{T} \right)^2 [\sigma \overline{(\delta y')^2}]_0. \quad (14.12)$$

Интересно проследить зависимость $[\sigma \overline{(\delta y')^2}]_0$ от энергии, задаваемую формулой (14.10), взяв $\lambda_\gamma(T)$, соответствующее удвоенному

значению энергии инжекции. При $(\delta\theta_M)_{\text{н.а.м.}} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ и $Z = 8$ получаем

$$\begin{array}{cccccc} T_{inj} = & 1 & 3,5 & 10 & 35 & \text{Мэв} \\ [\sigma(\delta y')^2]_0 = & 6,7 \cdot 10^{-28} & 8,8 \cdot 10^{-29} & 1,4 \cdot 10^{-29} & 1,3 \cdot 10^{-30} & \text{м}^2 \end{array}$$

Среднеквадратичное значение амплитуд

Рассмотрим простой случай синусоидальных колебаний, удовлетворяющих уравнениям

$$\left. \begin{aligned} y &= \hat{y} \cos \varphi_y; & \varphi_y &= \frac{S}{\lambda} + \delta = \omega_p t + \delta; \\ y' &= -\frac{\hat{y}}{\lambda} \sin \varphi_y; \\ \hat{y} &= \sqrt{y^2 + \lambda^2 y'^2} = \hat{y}(y, y'). \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial y'} = \lambda^2 \frac{y'}{\hat{y}} = -\lambda \sin \varphi_y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial y'^2} = \frac{\lambda^2}{\hat{y}} \cos^2 \varphi_y.$$

Колебания характеризуются амплитудой \hat{y} и фазой φ . Столкновение приводит к изменению угла $\delta y'$, а значит, и к изменению амплитуды, так что

$$\left. \begin{aligned} \delta \hat{y} &= \frac{\partial \hat{y}}{\partial y'} \delta y' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{y}}{\partial y'^2} (\delta y')^2 + \dots = \lambda \delta y' \sin \varphi_y + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\hat{y}} (\delta y')^2 \cos^2 \varphi_y + \dots, \\ (\delta \hat{y})^2 &= \lambda^2 (\delta y')^2 \sin^2 \varphi_y + \dots, \\ \delta(\hat{y}^2) &= 2\hat{y} \delta \hat{y} + (\delta \hat{y})^2 = 2\hat{y} \lambda \delta y' \sin \varphi_y + \lambda^2 (\delta y')^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.14)$$

Допустим, что известны некоторые усредненные значения величин, фигурирующих в правых частях этих равенств.

Для усредненных значений справедливы уравнения:

$$\overline{(\delta \hat{y})^2} = \frac{1}{2} \lambda^2 \overline{(\delta y')^2}; \quad (14.15)$$

$$\overline{\delta y} = \frac{1}{4} \lambda^2 \frac{\overline{(\delta y')^2}}{\hat{y}} = \frac{(\delta \hat{y})^2}{2\hat{y}}; \quad (14.16)$$

$$\delta(\hat{y}^2) = \lambda^2 \overline{(\delta y')^2}. \quad (14.17)$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\overline{\hat{y}^2} = \lambda \sum \overline{(\delta y')^2} = \lambda^2 \int \overline{(\delta y')^2} dN.$$

Число столкновений на отрезке ds

$$dN = n\sigma ds, \quad (14.18)$$

где N — плотность атомов остаточного газа; σ — эффективное сечение столкновения. Следовательно,

$$\overline{\hat{y}^2} = \lambda^2 n \int_{s_{inj}}^{s_f} \sigma \overline{(\delta y')^2} ds. \quad (14.19)$$

Введем далее в качестве переменной интегрирования кинетическую энергию T :

$$ds = \frac{ds}{dT} dT, \quad (14.20)$$

так что $\frac{dT}{ds} = \frac{(\Delta T)_{об}}{2\pi R} = e\rho\dot{B}$ [см. формулу (16.8)], и рассмотрим случай

$$\dot{B} = \text{const}, \quad \frac{dT}{ds} = \text{const}. \quad (14.21)$$

Подставляя выражения (14.12) и (14.20) в формулу (14.19), находим

$$\overline{\hat{y}^2} = C \frac{ds}{dT} \int_{T_{inj}}^{T_f} \left(\frac{T_{inj}}{T}\right)^2 dT, \quad (14.22)$$

где

$$C = \lambda^2 n [\sigma \overline{(\delta y')^2}]_0; \quad (14.23)$$

проинтегрировав уравнение (14.22), получаем

$$\overline{\hat{y}^2} = C \frac{T_{inj}}{dT/ds} \left(1 - \frac{T_{inj}}{T_f}\right). \quad (14.23a)$$

В асимптотическом случае при $T_f \rightarrow \infty$

$$\lim_{T_f \rightarrow \infty} \overline{\hat{y}^2} = C \frac{T_{inj}}{dT/ds}. \quad (14.23 б)$$

При $T = \text{const}$ имеем

$$\overline{\hat{y}^2}(s) = C \left(\frac{T_{inj}}{T}\right) (s - s_0) = n\lambda^2 \sigma \overline{(\delta y')^2} (s - s_0). \quad (14.23в)$$

Как известно, с увеличением кинетической энергии T и импульса p -частицы амплитуда невозмущенных бетатронных колебаний уменьшается пропорционально $p^{-1/2}$ [см. формулу (18.14)], т. е. в нерелятивистском случае

$$\hat{y} \sim T^{-1/4}. \quad (14.24)$$

В формулах (14.23) это затухание не учитывалось. Однако его нетрудно учесть, если заметить, что для каждого элемента суммы $\overline{\hat{y}^2} = \lambda \Sigma \overline{\delta(y')^2}$ можно написать соотношение, учитывающее затухание с увеличением энергии, т. е. для отдельного элемента соотношение (14.27) будет иметь вид

$$\delta(\overline{\hat{y}^2})_A = \lambda^2 (\overline{\delta y_T'})^2 \left(\frac{T}{T_f}\right)^{1/2}, \quad (14.17a)$$

и

$$\overline{\hat{y}^2}_A = C \frac{ds}{dT} \cdot \frac{T_{inj}^2}{T_f^{1/2}} \int_{T_{inj}}^{T_f} \frac{dT}{T^{3/2}} = 2C \frac{ds}{dT} T_{inj} \left[\left(\frac{T_{inj}}{T_f}\right)^{1/2} - \frac{T_{inj}}{T_f} \right]. \quad (14.25)$$

Выражение в скобках имеет максимум при $T_f = 4T_{inj}$, равный $\frac{1}{4}$.

Соответствующее максимальное значение $\overline{\hat{y}^2}_A$

$$(\overline{\hat{y}^2}_A)_M = (\overline{\hat{y}^2}_A)_{T=4T_{inj}} = \frac{1}{2} C \frac{ds}{dT} T_{inj}, \quad (14.26)$$

т. е. при учете затухания \hat{y}^2 уменьшается в два раза.

Представление траектории на фазовой плоскости

Из уравнения (14.17) определяется средний квадрат $\overline{y^2}$ амплитуды, однако при этом остаются неизвестными распределения амплитуд и отклонений, а значит, и плотность частиц в пучке. Случайная величина имеет распределение Гаусса, если она является суммой большого числа случайных величин, а также удовлетворяет еще некоторым условиям, которые обычно выполняются.

Амплитуда \hat{y} бетатронных колебаний, так же как и отклонение y , не представляется непосредственно в виде сумм случайных величин, однако ее можно записать в виде функций от некоторых переменных, являющихся суммами случайных величин. Как будет показано ниже, такими переменными являются координаты a_ϕ и a_q , определенные в фазовой плоскости y, y' .

Бетатронные колебания в фазовой плоскости с осями y, y^* представляются в виде вектора y (рис. 29), так что

$$y = \begin{cases} y = \hat{y} \cos \varphi_y; \\ y^* = \frac{dy}{d\varphi_y} = -\hat{y} \sin \varphi_y, \end{cases} \quad (14.27)$$

где $\varphi_y = \frac{s}{\lambda} + \delta = \omega_\beta t + \delta$.

В плоскости y, y^* траектория бетатронных колебаний является окружностью с направлением движения по часовой стрелке:

$$y^* = \frac{ds}{d\varphi_y} \cdot \frac{d\varphi_y}{ds} = \lambda y'. \quad (14.28)$$

При каждом столкновении вектор y изменяется на небольшую величину δy , такую, что

$$\delta y = \begin{cases} \delta y = 0; \\ \delta y^* = \lambda \delta y'. \end{cases} \quad (14.29)$$

Все элементарные векторы δy имеют на фазовой плоскости одинаковую угловую скорость. Удобно далее ввести в плоскости y, y^* новую

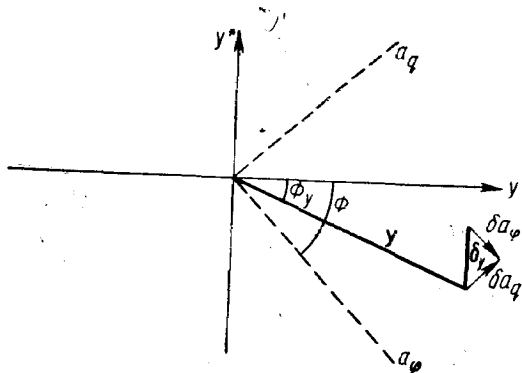


Рис. 29.

вращающуюся систему координат a_φ, a_q (рис. 29), в которой все элементы δy неподвижны. Новые координаты связаны со старыми равенствами:

$$\left. \begin{aligned} a_\varphi &= y \cos \varphi - y^* \sin \varphi; \\ a_q &= y \sin \varphi + y^* \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (14.30)$$

где

$$\varphi = \frac{s}{\lambda} + \delta_0 = \omega_\beta + \delta_0. \quad (14.31)$$

Разложим во вращающейся системе координат каждый вектор δy , соответствующий единичному столкновению. Допустим, что в момент столкновения t_k происходит изменение направления $\delta y'_k$ и фаза вращающейся системы в этот момент есть φ_k . Составляющие вектора δy_k во вращающейся системе координат имеют вид

$$\delta y_k = \begin{cases} (\delta a_\varphi)_k = \delta y_k \cos \varphi_k - \delta y_k^* \sin \varphi_k; \\ (\delta a_q)_k = \delta y_k \sin \varphi_k + \delta y_k^* \cos \varphi_k, \end{cases}$$

или, учитывая формулу (14.29),

$$\delta y_k = \begin{cases} (\delta a_\varphi)_k = -\lambda \delta y'_k \sin \varphi_k; \\ (\delta a_q)_k = \lambda \delta y'_k \cos \varphi_k. \end{cases} \quad (14.32)$$

Во вращающейся системе координат обе составляющие неподвижны. Складывая все $(\delta a_\varphi)_k$ или соответственно $(\delta a_q)_k$, найдем составляющие a_φ и a_q вектора y во вращающейся системе:

$$y = \begin{cases} a_\varphi = \sum_k (\delta a_\varphi)_k; \\ a_q = \sum_k (\delta a_q)_k. \end{cases} \quad (14.33)$$

Амплитуда бетатронных колебаний

$$\hat{y} = |y| = \sqrt{a_\varphi^2 + a_q^2}. \quad (14.34)$$

Учет затухания колебаний

При увеличении количества движения p и кинетической энергии T частиц амплитуды бетатронных колебаний затухают пропорционально $p^{-1/2}$ или (в нерелятивистской области) приблизительно как $T^{-1/4}$. С учетом затухания вместо выражений (14.27) получим

$$y(T_f) = \begin{cases} y = \hat{y} \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/4} \cos \varphi_y; \\ y^* = -\hat{y} \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/4} \sin \varphi_y. \end{cases} \quad (14.27a)$$

Это затухание можно приписать каждому элементу $(\delta a_\varphi)_k$, а в силу линейности (14.33) — и всей сумме. Если некоторому элементу $\delta y'_r$ соответствует заданная энергия T , то

$$\delta y_f = \begin{cases} (\delta a_\varphi)_f = -\lambda \delta y'_r \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/4} \sin \varphi_r; \\ (\delta a_q)_f = \lambda \delta y'_r \left(\frac{T}{T_f} \right)^{1/4} \cos \varphi_r. \end{cases} \quad (14.32a)$$

Складывая элементы (14.32a), получим вектор y_f , соответствующий бетатронным колебаниям при энергии T_f :

$$y_f = \begin{cases} (a_\varphi)_f = \sum (\delta a_\varphi)_f; \\ (a_q)_f = \sum (\delta a_q)_f. \end{cases} \quad (14.33a)$$

(Индекс f в дальнейшем опускаем.)

**Статистическое распределение отклонений
и амплитуд бетатронных колебаний в пучке**

Центральная предельная теорема утверждает: пусть $a = \sum_{k=1}^N \delta a_k$ является суммой N независимых случайных величин с нулевыми средними значениями ($\overline{\delta a_k} \equiv 0$) и, кроме того, все переменные — величины одного порядка, что исключает возможность для a зависеть лишь от нескольких величин из всего множества; тогда при $N \rightarrow \infty$ распределение a будет гауссовым, т. е. будет иметь плотность вероятности

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a}} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}} \quad (14.35)$$

с дисперсией $\sigma_a^2 = N \overline{(\delta a_k)^2}$.

Компоненты a_φ и a_q удовлетворяют условиям центральной предельной теоремы, поэтому их распределение является гауссовым. Определим их дисперсию, опуская впредь индексы φ и q .

Пользуясь формулой (14.32), можно найти среднеквадратичное значение $\overline{(\delta a)'_T}$ для некоторой определенной энергии $T < T_f$:

$$\overline{(\delta a)'_T}^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \overline{(\delta y)'_T}^2 \frac{\sin^2 \theta_T}{\cos^2 \theta_T}.$$

Поскольку $\delta y'_T$ и θ_T — независимые случайные величины и так как распределение по φ равномерно, то

$$\overline{(\delta a)^2} = \frac{1}{2} \lambda^2 (\delta y)'_T^2 \left(\frac{T}{T_f} \right), \quad (14.36)$$

где $\overline{(\delta a)}$ имеет индекс φ или q .

И, наконец, для всего интервала энергий между T_{inj} и T_f

$$\overline{(\delta a)^2} = \frac{1}{N} \int_{T_{inj}}^{T_f} \overline{(\delta a)'_T}^2 \frac{dN}{dT} dT, \quad (14.37)$$

где dN и N — число столкновений соответственно в интервалах dT и $[T_{inj}, T_f]$.

Распределение суммы $a = \sum \delta a$ будет гауссовым с дисперсией

$$\sigma_a^2 = N \overline{(\delta a)^2} \int_{T_{inj}}^{T_f} \overline{(\delta a)'_T}^2 \frac{dN}{dT} dT$$

[см. формулу (14.35)]. Чтобы оценить этот интеграл, введем

$$\frac{dN}{dT} = \frac{dN}{ds} \cdot \frac{ds}{dT} = n\sigma_T \frac{ds}{dT}$$

[см. формулу (14.18)] и положим [см. формулу (14.21)] $dT/ds = \epsilon\rho\tilde{B} = \text{const.}$ Учитывая также уравнения (14.12) и (14.36), найдем

$$\sigma_T \overline{(\delta a)_T^2} = \frac{1}{2} \lambda^2 [\sigma \overline{(\delta y')^2}]_0 \frac{T_{inj}}{T_f^{1/2} T^{3/2}}.$$

И, наконец,

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{2} C \frac{ds}{dT} \cdot \frac{T_{inj}}{T_f^{1/2}} \int_{T_{inj}}^{T_f} \frac{dT}{T^{3/2}}, \quad (14.38)$$

где [см. формулу (14.22)] $C = n\lambda^2 [\sigma \overline{(\delta y')^2}]_0$. Аналогично тому как это делалось выше, проинтегрируем уравнение (14.38):

$$\sigma_a^2 = C \frac{ds}{dT} T_{inj} \left[\left(\frac{T_{inj}}{T_f} \right)^{1/2} - \frac{T_{inj}}{T_f} \right]. \quad (14.39)$$

Выражение в квадратных скобках имеет максимум, равный $1/4$ для $T_f = 4T_{inj}$ и

$$(\sigma_a^2)_{\text{макс}} = (\sigma_a^2)_{T=4T_{inj}} = \frac{1}{4} C \frac{ds}{dT} T_{inj}. \quad (14.40)$$

Перейдем теперь к распределению отклонений y и амплитуд \hat{y} : σ_a^2 — дисперсия распределения каждой из компонент a_φ и a_q вектора y ; a_φ и a_q — вращающиеся координаты в фазовой плоскости y, y' , в которой движение частиц происходит по окружностям с центром в начале координат. Распределение частиц в плоскости y, y' обладает, следовательно, вращательной симметрией.

Таким образом, распределение $p(y)$ плотности частиц в пространстве координат аналогично распределению компоненты a :

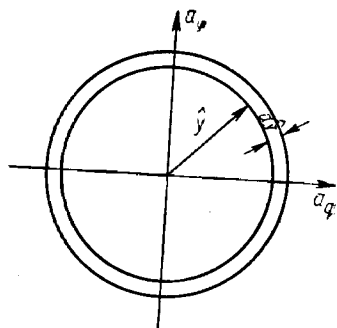


Рис. 30.

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (14.41)$$

где $\sigma_y = \sigma_a$.

В силу формулы (14.34) $\hat{y} = a_\varphi^2 + a_q^2$.

На рис. 30 представлены амплитуды \hat{y} в плоскости a_φ, a_q в узкой области, заключенной между концентрическими окружностями радиусами \hat{y} и $\hat{y} + d\hat{y}$. Вероятность того, что частица находится в этой области

$$p(\hat{y}) d\hat{y} = \iint p(a_\varphi) d\varphi p(a_q) da_q,$$

причем

$$p(a_\varphi) p(a_q) = \frac{1}{2\pi\sigma_a^2} e^{-\frac{a_\varphi^2 + a_q^2}{2\sigma_a^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_a^2} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} p(\hat{y}) d\hat{y} &= \frac{1}{2\pi\sigma_a^2} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}} \iint da_\varphi da_q; \\ \iint da_\varphi da_q &= 2\pi\hat{y}d\hat{y}; \\ p(\hat{y}) &= \frac{1}{\sigma_a^2} \hat{y} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}} = \frac{2}{\sigma_a^2} \hat{y} e^{-\frac{\hat{y}^2}{2\sigma_a^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (14.42)$$

где $\hat{\sigma}^2$ — дисперсия амплитуды: $\hat{\sigma}^2 = \overline{\hat{y}^2} = 2\sigma_a^2$,

т. е. получаем распределение Релея. Дисперсия определяется формулами (14.25) и (14.26), а σ_a^2 — (14.39).

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема утверждает: если N случайных независимых величин x_i со средними значениями $\overline{x_i} = 0$ имеют одинаковые законы распределения и одинаковые дисперсии $\overline{x^2}$, то плотность вероятности $f(y)$ суммы этих величин при $N \rightarrow \infty$ подчиняется закону распределения Гаусса:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (14.43)$$

где σ_y^2 — дисперсия распределения,

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} = N\overline{x^2}.$$

Докажем эту теорему. Пусть x — случайная переменная. Определим функцию распределения

$$F(x) = P(x < X) \quad (14.44)$$

как вероятность того, что случайная величина $x < X$. Определим также плотность вероятности

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad (14.45)$$

и характеристическую функцию

$$\varphi(u) = E(e^{iux}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx, \quad (14.46)$$

где $E(e^{iux})$ есть математическое ожидание e^{iux} ; $\varphi(u)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, умноженное на 2π ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-i \cdot ux} du;$$

соотношение между $\varphi(u)$ и $f(x)$ взаимнооднозначно.

Характеристическая функция используется для вычисления моментов, математических ожиданий или средних значений.

Поскольку $E(x) = \bar{x}$, $E(x^2) = \bar{x^2}$, $E(x^3) = \bar{x^3}$,

можно написать, что

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= E(e^{iux}) = E\left(1 + \frac{iux}{1!} + \frac{i^2 u^2 x^2}{2!} + \dots\right) = \\ &= E(1) + E\left(\frac{iux}{1!}\right) + E\left(\frac{i^2 u^2 x^2}{2!}\right) + \dots = 1 + \frac{i u \bar{x}}{2} + \frac{i^2 u^2 \bar{x^2}}{2} + \dots \end{aligned} \quad (14.47)$$

Рассмотрим сложение случайных переменных. Пусть x_1, x_2, x_3 — независимые случайные величины и $y = \sum x_i$, тогда характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\varphi_y(u) = \prod \varphi_{x_i}(u). \quad (14.48)$$

Например, для суммы двух случайных величин $y = x_1 + x_2$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_y &= E(e^{iux}) = E(e^{iu(x_1+x_2)}) = E(e^{iux_1} e^{iux_2}) = \\ &= \iint e^{iux_1} f(x_1) e^{iux_2} f(x_2) dx_1 dx_2 = E(e^{iux_1}) = E(e^{iux_2}). \end{aligned}$$

Вторичная характеристическая функция определяется соотношением

$$\psi(u) = \ln \varphi(u). \quad (14.49)$$

Соотношение между функциями $f(x)$ и $\psi(u)$ взаимнооднозначно.

В качестве примера рассмотрим распределение Гаусса [см. формулу (14.13)]. Характеристическая функция в этом случае будет равна

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx = e^{-1/2u^2\sigma^2}, \quad (14.50)$$

а вторичная характеристическая функция

$$\psi(u) = -1/2 u^2 \sigma^2. \quad (14.51)$$

Вернемся к доказательству центральной предельной теоремы. Поскольку x_1, x_2, x_3 имеют один и тот же закон распределения, то

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \varphi_3(u) \dots = \varphi_N(u).$$

Рассмотрим величину

$$\frac{y}{\sqrt{N}} = \frac{x_1}{\sqrt{N}} + \frac{x_2}{\sqrt{N}} + \frac{x_3}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{x_N}{\sqrt{N}}. \quad (14.52)$$

Ее характеристическая функция переменных x_i/\sqrt{N}

$$\varphi_x(u) = E\left(e^{\frac{iux}{\sqrt{N}}}\right) = 1 + \frac{i u}{1} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)} + \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^3} + \dots$$

Предположим, что распределение x имеет нулевое среднее значение. Из этого следует, что $\frac{i u}{1!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)} = 0$. Далее

$$\varphi_x = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^3} + \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi_x &= \ln \varphi_x = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \dots = \\ &= \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^3} + \dots \end{aligned} \quad (14.53)$$

Применяя к сумме (14.52) правило (14.48), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_y &= \varphi_x^N; \\ \psi_y &= \ln \varphi_y = N \ln \varphi_x = N \psi_x = \frac{i^2 u^2}{2!} \overline{x^2} + \frac{i^3 u^3}{3!} \overline{\frac{x^3}{\sqrt{N}}}; \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_y &= -\frac{u^2}{2!} \overline{x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.54)$$

Сравнивая (15.54) и (14.51), а также имея в виду взаимнооднозначное соотношение между вторичными характеристическими функциями, можно заключить, что плотность вероятности величины $y/\sqrt{N} = (\sum_i x_i)/\sqrt{N}$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к гауссовому распределению с дисперсией $\sigma_{(y/\sqrt{N})} = \sqrt{\overline{x^2}}$ и, значит, распределение величины y при $N \rightarrow \infty$ также стремится к гауссовому распределению $f(y)$ с дисперсией

$$\sigma_y^2 = N \overline{x^2}. \quad (14.55)$$

14.2. Влияние стенок камеры

Дифференциальное уравнение расширения пучка

Для упрощения изложения пренебрежем пока затуханием колебаний. Тогда в неограниченном пространстве амплитуды подчиняются закону распределения Релея и пучок расширяется по простому закону (14.23а).

Присутствие вакуумной камеры изменяет это положение для частиц, достигающих некоторой граничной амплитуды. Чтобы найти распределение частиц в ограниченном пространстве, воспользуемся методом Фоккера — Планка.

Пусть $p(s, \hat{y})d\hat{y}$ — вероятность амплитуды \hat{y} в точке s . При переходе от точки s к $s + \Delta s$ распределение изменяется, так что

$$p(s + \Delta s, \hat{y}) = \int p(s, \hat{y} - \Delta \hat{y}) q(\hat{y} - \Delta \hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y}, \quad (14.56)$$

где $q(\hat{y} - \Delta \hat{y}, \Delta \hat{y})$ — вероятность изменения амплитуды частицы с $(\hat{y} - \Delta \hat{y})$ на $\Delta \hat{y}$ на отрезке Δs .

При разложении подынтегральных выражений в ряды получаются следующие дифференциальные равенства:

$$\begin{aligned} p(s, \hat{y} - \Delta \hat{y}) &= p(s, \hat{y}) - \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} p(s, \hat{y}) \right] \Delta \hat{y} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} p(s, \hat{y}) \right] (\Delta \hat{y})^2; \\ q(\hat{y} - \Delta \hat{y}) &= q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) - \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \right] \Delta \hat{y} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \right] (\Delta \hat{y}). \end{aligned}$$

Каждое равенство справедливо лишь для достаточно малых поворотов $\Delta \hat{y}$. При перемножении последних выражений подынтегральное выражение [формула (14.56)] запишется в виде

$$\begin{aligned} p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) - \left[p(s, \hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) + q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p(s, \hat{y}) \right] \times \\ \times \Delta \hat{y} + \frac{1}{2} \left[q \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} p + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q + p \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} q \right] (\Delta \hat{y})^2; \quad (14.57) \end{aligned}$$

Интегрируем] последовательно каждый из трех членов этого выражения:

$$\begin{aligned} \int p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y} &= p(s, \hat{y}) \int q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y} = p(s, \hat{y}). \quad (14.57a) \\ \int \left[p \frac{\partial}{\partial \hat{y}} q + q \frac{\partial}{\partial \hat{y}} p \right] \Delta \hat{y} d\Delta \hat{y} &= \int \left[\frac{\partial}{\partial \hat{y}} (pq) \right] \Delta \hat{y} d\Delta \hat{y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \int \Delta \hat{y} p(s, \hat{y}) q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(p \int \Delta \hat{y} q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y} \right) = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} (p \overline{\Delta \hat{y}}). \quad (14.57\text{в})$$

Из соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{y}^2} [p \overline{(\Delta \hat{y})^2}] = \frac{1}{2} \int \{ \text{коэфф [] при } (\Delta \hat{y})^2 \text{ в (14.57)} \} \times \\ \times (\Delta \hat{y})^2 d\Delta \hat{y} \quad (14.57\text{в})$$

учитывая, что $\overline{(\Delta \hat{y})^2} = \int (\Delta \hat{y})^2 q(\hat{y}, \Delta \hat{y}) d\Delta \hat{y}$, получаем

$$p(s + \Delta s, \hat{y}) - p(s, \hat{y}) = \frac{\partial p(s, \hat{y})}{\partial s} \Delta s = -\frac{\partial}{\partial \hat{y}} [\overline{\Delta \hat{y}} p] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} [\overline{(\Delta \hat{y})^2} p]. \quad (14.58)$$

С другой стороны, $\overline{(\Delta \hat{y})^2} = \frac{(\overline{\Delta \hat{y}})^2}{2\gamma}$ [см. формулу (14.16)] и $\overline{(\Delta \hat{y})^2}$ не зависит от \hat{y} , что, вообще говоря, неверно, если учитывать затухание, которым здесь пренебрегаем, чтобы не усложнять выкладки. Подставляя последние соотношения в уравнение (14.58), имеем:

$$\Delta s \frac{\partial}{\partial s} p(s, \hat{y}) = \frac{1}{2} \overline{(\Delta \hat{y})^2} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{p}{\hat{y}} \right] = \\ = \frac{1}{2} \overline{(\Delta \hat{y})^2} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\frac{p}{\hat{y}} \right) \right]. \quad (14.59)$$

Введем переменную

$$\xi = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\overline{(\Delta \hat{y})^2}}{\Delta s} ds, \quad (14.60)$$

тогда

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta \hat{y})^2}}{\Delta s}; \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta \hat{y})^2}}{\Delta s} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

В результате дифференциальное уравнение изменения функции распределения амплитуд принимает вид

$$\frac{\partial p(\xi, \hat{y})}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[\hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\frac{p}{\hat{y}} \right) \right]. \quad (14.61)$$

Подобное уравнение встречается при изучении вопросов распространения тепла. Если Y — эффективная полуширина камеры, то граничное условие будет следующим: $p(\xi, \hat{y}) = 0$ при $\hat{y} = Y$. Если, кроме того, ограничиться рассмотрением случая нулевой начальной амплитуды

$$p(0, \hat{y}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{y} = 0; \\ 0, & \text{если } \hat{y} \neq 0, \end{cases} \quad (14.62)$$

то решение, удовлетворяющее этим условиям, будет

$$\rho(\xi, \hat{y}) = \frac{2\hat{y}}{Y^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_k \hat{y}}{Y}\right)}{[J_1(\lambda_k)]^2} e^{-\frac{\lambda_k^2 \xi}{Y^2}}, \quad (14.63)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода, имеющие соответственно индекс 0 или 1, λ_k — положительный корень уравнения $J_0(\lambda) = 0$.

Вероятность прохождения

Вероятность прохождения до точки ξ

$$P(\xi) = \int_0^Y \rho(\xi, \hat{y}) d\hat{y} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} e^{-\frac{\lambda_k^2 \xi}{Y^2}} \quad (14.64)$$

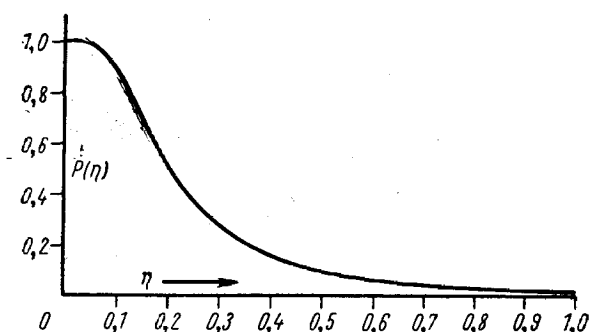


Рис. 31.

можно найти, если учесть, что

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x). \quad (14.65)$$

Вспомним, что $\xi = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{(\Delta \hat{y})^2}{\Delta s} ds = \frac{1}{2} \overline{\hat{y}^2}$ [см. формулу (14.60)].

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{\xi}{Y^2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\hat{y}^2}}{Y^2}. \quad (14.66)$$

После этого выражение (14.64) принимает вид

$$P(\eta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k J_1(\lambda_k)} e^{-\lambda_k^2 \eta}. \quad (14.67)$$

График $P(\eta)$ показан на рис. 31.

Влияние затухания и форм-фактора бетатронных колебаний

Затухание колебаний в предыдущих вычислениях не учитывалось. Его можно грубо учесть, подставив в формулу (14.66) из равенства (14.26) вместо амплитуды в отсутствие затухания максимальную амплитуду при наличии последнего. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\max} &= \frac{1}{4} (\hat{y}_A^2)_{\max}; \\ \eta_{\max} &= \frac{\xi_{\max}}{Y^2} = \frac{1}{4} \frac{(\hat{y}_A^2)_{\max}}{Y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (14.68)$$

Выше предполагалось, что траектории — синусоиды. Чтобы учесть влияние реальной формы колебаний, в равенство (14.26) следует ввести форм-фактор $F = \beta_{\max}/\beta$:

$$(\hat{y}_A^2) = \frac{1}{2} FC \frac{ds}{dT} T_{inj}, \quad (14.26a)$$

где $dT/ds = e\dot{\nu}B$, $C = \lambda^2 n [\sigma(\delta y')^2]_0$; $\lambda = R/\nu$, $n = 7,1 \cdot 10^{22} P_{\text{ммрт.ст.}} \text{ м}^{-3}$ (n — плотность атомов остаточного газа, а не его молекул). Для $[\sigma(\delta y')^2]_0$ нужно воспользоваться формулами (14.10) — (14.12), и следующей за ними таблицей.

Из графика (рис. 31) следует, что вероятность потери 10% частиц получается при $\eta_{\max} = 0,09$. Для величин, больших η_{\max} , потери резко возрастают.

Очевидно, что следует обеспечить выполнение в ускорителе условия $\eta_{\max} \leq 0,09$,

$$\sqrt{(\hat{y}_A^2)_{\max}} = 2Y \sqrt{\eta_{\max}} \leq 0,6Y. \quad (14.69)$$

Численный пример

Протонный синхротрон в Сакле имеет эффективную полувысоту вакуумной камеры $Y = 4 \text{ см}$, $R = 11 \text{ м}$, $\nu_z = 0,88$, $T = 3,5 \text{ Мэв}$, $dT/ds = 12,7 \text{ эв/м}$. Если считать остаточный газ кислородом, то из теории следует, что потеря 10% пучка должна происходить при давлении $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ мм рт. ст.}$ В действительности указанные потери наблюдаются при давлении около $2,7 \cdot 10^{-6} \text{ мм рт. ст.}$

Часть четвертая

УСКОРЕНИЕ

Глава 15

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

15.1. Некоторые определения

Для описания немоноэнергетических пучков частиц обычно вводят некоторые дисперсионные параметры, относящиеся к отклонению импульса Δp или энергии ΔE частиц пучка. Наиболее важным параметром, через который выражаются все другие, является коэффициент расширения орбит α , характеризующий удлинение замкнутой орбиты:

$$\alpha = \frac{p}{C} \cdot \frac{dC}{dp} = \frac{p}{R} \cdot \frac{dR}{dp}. \quad (15.1)$$

Так как

$$\frac{dE}{E} = \beta^2 \frac{dp}{p}, \quad (15.2)$$

то

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{dR}{dE} = \frac{\alpha}{\beta^2}. \quad (15.3)$$

Введем понятие среднего поля вдоль замкнутой орбиты $\bar{B}_f = \frac{1}{C} \oint B_f ds$, для которого имеет место соотношение

$$\bar{B}_f R = \frac{p}{e}. \quad (15.4)$$

Вычисляя логарифмическую производную, нетрудно получить соотношения

$$\frac{pd\bar{B}_f}{\bar{B}_f dp} = 1 - \alpha; \quad (15.5)$$

$$\frac{Rd\bar{B}_f}{\bar{B}_f dR} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}. \quad (15.6)$$

Отклонение угловой скорости обращения характеризует

$$\eta = \frac{p}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dp} = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha = \frac{E_r^2 - \alpha E^2}{E^2}. \quad (15.7)$$

Используя соотношения

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\beta c}{R}; \\ \frac{d\omega}{\omega} &= \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dR}{R}; \\ p &= m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{d\beta}{\beta} = (1-\beta^2) \frac{dp}{p} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p}; \\ \frac{dR}{R} &= \alpha \frac{dp}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

а также (15.2), (15.7) и (15.3), можно получить

$$\frac{E d\omega}{\omega dE} = \frac{\eta}{\beta^2} = \frac{E_0^2 - \alpha E^2}{E^2 - E_r^2} \quad (15.9)$$

и

$$\frac{R d\omega}{\omega dR} = \frac{\eta}{\alpha} = \frac{E_r^2 - \alpha E^2}{\alpha E^2}. \quad (15.10)$$

15.2. Коэффициент расширения орбит

В первом приближении увеличение ΔR среднего радиуса орбиты определяется криволинейными участками орбиты. Замкнутая орбита в ускорителе состоит из дуг окружности радиуса $\rho_0 = \text{const}$ и прямых промежутков, которые могут содержать в себе квадрупольные линзы. Можно написать, что

$$\Delta R(\Delta p) = \frac{1}{2\pi\rho_0} \oint_m x_f ds = \overline{(x_f)}_m. \quad (15.11)$$

В этом выражении $x_f(s)$ — отклонение замкнутой орбиты частицы с отклонением импульса Δp . Индекс m показывает, что интеграл или среднее берется только по магнитным секторам.

В соответствии с определением, сформулированным выше,

$$\alpha = \frac{p dR}{R dp} = \frac{p}{R} \cdot \frac{\overline{(x_f)}_m}{\Delta p}. \quad (15.12)$$

Вводя местное возмущение замкнутой орбиты

$$g(s) = \frac{p}{R} \cdot \frac{dx_f(s)}{dp}, \quad (15.13)$$

можно получить соотношение

$$\alpha = \overline{g}_m. \quad (15.14)$$

Отклонение замкнутой орбиты с переменной $\theta = s/R$ определяется уравнением

$$\frac{d^2 x_f}{d\theta^2} + (1-n) x_f = \frac{R^2 \Delta \rho}{\rho p}$$

и условиями замкнутости $x_f(2\pi) = x_f(0)$; $x_f'(2\pi) = x_f'(0)$. Следовательно, величина g определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + (1-n) g &= \frac{R}{\rho}; \\ g(2\pi) &= g(0); \quad g'(2\pi) = g'(0). \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

При постоянном показателе спада поля n и наличии прямолинейных промежутков интеграл (15.15) дает

$$g = \frac{1}{(1-n)(1-k)} = \frac{1}{v_x^2} = \text{const}; \quad (1+k) = \frac{R}{\rho} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\alpha = \bar{g}_m = \frac{1}{v_x^2}. \quad (15.16)$$

В случае поля с переменным градиентом можно получить приближенное значение интеграла (15.15), заменяя переменные силы средними значениями последних. Уравнение (15.15) в этих условиях принимает вид $g'' + v_x^2 g = R/\rho = 1$, а решение его $g = 1/v_x^2 = \text{const}$ и

$$\alpha \approx \bar{g}_m = \frac{1}{v_x^2}. \quad (15.17)$$

Точное интегрирование соотношений (15.15) дает для структуры типа $FO_1 FO_2 DO_1 DO_2$ (рис. 32) выражение

$$\alpha = \frac{4}{\varphi n (1+k_1+k_2) \left(\text{cth} \frac{\varphi}{2} - \text{ctg} \frac{\varphi}{2} + k_2 \varphi \right)}, \quad (15.18)$$

где $\varphi = \pi \sqrt{n}/N = s \sqrt{n}/\rho$, $k_1 = l_1/s$; $k_2 = l_2/s$; l_1, l_2 — длины секций O_1, O_2 ; $2s = 2\pi\rho/N$ — общая длина магнитных секторов данной структуры.

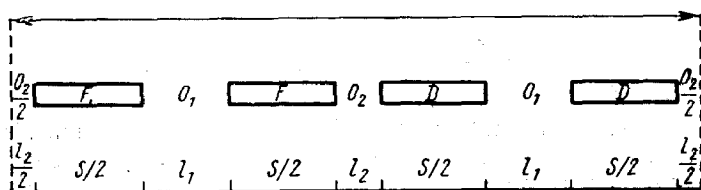


Рис. 32.

Из рис. 32 получаем структуры $FOFDOD$ ($k_2 = 0$), $FODO$ ($k_1 = 0$) и FD ($k_1 = k_2 = 0$).

Глава 16

СИНХРОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

16.1. Синхронная частица

Определение. Рассмотрим ускорение частиц переменным электрическим полем, частота которого хотя бы приближенно находится в резонансе с частотой обращения частиц. Пусть в ускоряющем промежутке существует разность потенциалов

$$V = \hat{V}_{\text{вч}} \sin \int \omega_{\text{вч}} dt = \hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi, \quad (16.1)$$

где $V_{\text{вч}}$ и $\omega_{\text{вч}}$ могут медленно изменяться. На окружности ускорителя размещают много таких ускоряющих промежутков, проходя через которые, частицы ускоряются.

Введем теперь фазу φ высокочастотного напряжения в момент прохождения некоторой частицы через резонатор. Синхронной (или равновесной) частицей назовем такую частицу, частота обращения которой ω_s в целое число раз h меньше частоты ускоряющего поля

$$\omega_{\text{вч}} = h \omega_s \quad (16.2)$$

и движение которой удовлетворяет соотношению

$$\varphi(t) = \text{const} = \varphi_s. \quad (16.3)$$

Величина h называется кратностью частоты ускоряющего поля.

В процессе ускорения частота обращения синхронной частицы изменяется по некоторому закону $\omega_{\text{вч}}(t)$. Вид этого закона для импульсного синхротрона будет определен ниже.

Ускорение в импульсном магнитном поле. Закон нарастания магнитного поля $B_0(t)$ в синхротроне с импульсным магнитным полем зависит от параметров системы питания электромагнита и обычно является линейным (точнее, экспоненциальным). Если электромагнит представляет собой резонансную цепь с дополнительным полем смещения, то в этом случае закон изменения поля имеет вид

$$B_0(t) = \frac{\hat{B}_0}{2} (1 - \cos \omega t) = \hat{B}_0 \sin^2 \frac{\omega}{2} t. \quad (16.4)$$

В том и другом случаях функция $B_0(t)$ является заданной и не может быть легко изменена ввиду большой мощности системы питания, а потому она и определяет остальные характеристики цикла.

Для синхронной частицы имеет место соотношение

$$\frac{\omega_{\text{вч}}}{h} = \omega_s = \frac{e}{m} \bar{B} = \frac{e}{m} \cdot \frac{\rho_0}{R_0} B_0, \quad (16.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{E_s}{c^2}; \\ E_s^2 &= c^2 \rho_s^2 + E_0^2; \\ \rho_s &= eB_0 \rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

Подставляя соотношения (16.6) в равенство (16.5), можно найти связь между магнитным полем и соответствующей частотой ускоряющего напряжения:

$$\frac{\omega_{ВЧ}}{h} = \omega_s = \frac{c}{R_0} \sqrt{\frac{B_0^2}{(E_0/ec\rho_0)^2 + B_0^2}}, \quad (16.7)$$

откуда, в частности, видно, что при увеличении энергии частицы частота ω_s стремится к величине c/R_0 . Прирост энергии синхронной частицы за один оборот

$$(\Delta E_s)_{об} = \frac{dE_s}{dt} (\Delta t)_{об} = \frac{dE_s}{dB_0} B_0 \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Находя dE_s/dB_0 из формулы (16.6) и подставляя ω_s из (16.7), получаем

$$(\Delta E_s)_{об} = 2\pi e \rho_0 R_0 B_0. \quad (16.8)$$

Прирост энергии за оборот постоянен, если магнитное поле нарастает равномерно.

В протонном синхротроне «Сатурн», например, указанные параметры имеют следующие значения: $\dot{B}_0(t) = \text{const} = 1,5 \text{ тл/сек}$;

$$(\Delta E_s)_{об} = 1170 \text{ эв}. \quad (16.9)$$

Таким образом, синхронной частице необходимо совершить $2,57 \cdot 10^6$ оборотов, чтобы набрать максимальную энергию 3 Гэв , что соответствует расстоянию 170 000 км , т. е. более четырех оборотов вокруг земного шара.

Фаза φ частицы зависит от ее азимутального положения. Фаза синхронной частицы, при которой обеспечивается увеличение энергии $(\Delta E_s)_{об}$, удовлетворяет равенству

$$\sin \varphi_s = \frac{(\Delta E_s)_{об}}{e \hat{V}_{ВЧ}}. \quad (16.10)$$

Если это соотношение удовлетворяется для φ_s , то оно удовлетворяется и для $\pi - \varphi_s$, но только одно из этих значений соответствует устойчивому динамическому равновесию.

16.2. Несинхронная частица

Кинематические соотношения. Несинхронная частица отличается от синхронной по меньшей мере одним из следующих параметров: азимутальное положение $\theta = \theta_s + \Delta\theta$;

частота обращения $\omega = \omega_s + \Delta\omega$;
 фаза ускоряющего напряжения $\varphi = \varphi_s + \Delta\varphi$;
 импульс $p = p_s + \Delta p$.

Прежде чем составить уравнения движения для несинхронной частицы, найдем кинематическую связь между отклонениями импульса Δp и фазы $\Delta\varphi$. Очевидно, что

$$\Delta\varphi = -h\Delta\theta \quad (16.11)$$

(азимут θ отсчитывается в направлении движения частиц), откуда

$$\Delta\omega = \frac{d}{dt}(\Delta\theta) = -\frac{d}{hdt}(\Delta\varphi),$$

и, так как $\frac{d}{dt}\Delta\varphi = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}$, то

$$\Delta\omega = -\frac{1}{h}\dot{\varphi}. \quad (16.12)$$

Наконец, вводя [параметр $\eta = \frac{p d\omega}{\omega dp}$] [см. формулу (15.7)], получим

$$\Delta p = \frac{-p}{h\eta\omega}\dot{\varphi}. \quad (16.13)$$

Если задается величина отклонения энергии, то, используя соотношения

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2; \quad \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = v; \quad \Delta E = \frac{dE}{dp} \Delta p = v \Delta p = \omega R \Delta p,$$

нетрудно получить равенство

$$\frac{\Delta E}{\omega} = R \Delta p. \quad (16.14)$$

Уравнение синхротронных колебаний. Проходя разность потенциалов $V = \hat{V}_{вч} \sin \varphi$ в ускоряющем промежутке, частица увеличивает свою энергию на величину $eV_{вч} \sin \varphi$, а импульс — на $(1/R\omega)eV_{вч} \sin \varphi$.

Разделив последнее выражение на длительность одного оборота ($2\pi/\omega$), получим средний прирост импульса за единицу времени $p = (1/2\pi R)e\hat{V}_{вч} \sin \theta$ и, значит, для несинхронной частицы

$$2\pi R \dot{p} = 2\pi \frac{e\hat{V}_{вч}}{\omega} \sin \varphi, \quad (16.15a)$$

а для синхронной

$$2\pi R_s \dot{p}_s = e\hat{V}_{вч} \sin \varphi_s. \quad (16.15b)$$

Вычитая, получаем

$$2\pi \Delta(R\dot{p}) = e\hat{V}_{вч} (\sin \varphi - \sin \varphi_s). \quad (16.16)$$

С другой стороны, с точностью до членов первого порядка малости относительно ΔR и Δp можно написать

$$\Delta(R\dot{p}) = \frac{d}{dt}(R_s \Delta p) = \frac{d\Delta E}{dt \omega_s} \quad (16.17)$$

и далее [см. равенство (16.14)]

$$\Delta(R\dot{p}) = R_s \Delta \dot{p} + \dot{p}_s \Delta R + \dots;$$

$$\Delta R = \left(\frac{dR}{dp}\right) \Delta p + \dots;$$

$$\dot{p}_s \Delta R = \dot{p}_s \left(\frac{dR}{dp}\right)_s; \quad \Delta p = \dot{R}_s \Delta p;$$

$$\Delta(R\dot{p}) = R_s \Delta \dot{p} + \dot{R}_s \Delta p = \frac{d}{dt}(R_s \Delta p) = \frac{d}{dt} \frac{\Delta E}{\omega_s}.$$

Подставляя выражения (16.17) в уравнение (16.16) и учитывая формулу (16.13), приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dt} W = e\hat{V}_{\text{вч}}(\sin \varphi - \sin \varphi_s), \quad (16.18a)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{[\hbar \eta \omega_s]}{R_s p_s} W. \quad (16.18б)$$

Эти уравнения являются каноническими относительно переменных φ и

$$W = 2\pi R_s \Delta p = 2\pi \Delta E / \omega_s. \quad (16.18в)$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид:

$$H(\varphi, W, t) = e\hat{V}_{\text{вч}}(t) [\cos \varphi - \cos \varphi_s + (\varphi - \varphi_s) \sin \varphi_s] - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\hbar \eta(t) \omega_s(t)}{R_s(t) p_s(t)} W^2. \quad (16.18г)$$

В литературе часто применяется запись

$$\frac{\hbar \eta}{4\pi} \frac{\omega_s}{R_s p_s} = \pi \hbar \left(\hat{f}_{\text{вч}} \frac{df_{\text{вч}}}{dt} \right);$$

Исключая W из уравнения (16.18a) с помощью соотношения (16.18б), можно вместо двух уравнений первого порядка получить одно уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{R_s p_s}{\hbar \eta \omega_s} \cdot \frac{d}{dt} \varphi \right] + \frac{e\hat{V}_{\text{вч}}}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) = 0. \quad (16.19)$$

16.3. Линеаризованное уравнение синхротронных колебаний

Параметры R_s , P_s , η , ω_s и $\hat{V}_{ВЧ}$ представляют собой постоянные величины или изменяются достаточно медленно по сравнению с величиной $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_s$, так что их можно рассматривать как константы и, следовательно, уравнение (16.19) можно записать в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) = 0, \quad (16.20)$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{h\eta\omega_s e \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{p_s 2\pi R_s}}$, или

$$\Omega = \omega_\infty \sqrt{\frac{h\eta \cos \varphi_s e \hat{V}_{ВЧ}}{2\pi E_s}}. \quad (16.21)$$

Последнее выражение получаем, подставляя $\omega/pR = 1/mR^2 = \omega_\infty^2/E$, где $\omega_\infty = c/R$.

Для частиц, которые очень мало смещаются по фазе относительно синхронной частицы, при разложении в ряд $\sin \varphi = \sin(\varphi_s + \Delta\varphi) = \sin \varphi_s + (\cos \varphi_s) \Delta\varphi \dots$ из уравнения (16.20) получаем линейное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \Delta\varphi = 0. \quad (16.22)$$

При $\Omega^2 > 0$ уравнение (16.22) является уравнением устойчивых гармонических колебаний с угловой частотой Ω . Условие устойчивости, следовательно, имеет вид

$$\eta \cos \varphi_s > 0 \quad (16.23)$$

и, значит, лишь одна из двух фаз φ_s и $\pi - \varphi_s$ соответствует устойчивому ускорению, а именно та, которая удовлетворяет условию

$$0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \eta > 0; \quad (16.23a)$$

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_s < \pi \quad \text{при } \eta < 0. \quad (16.23b)$$

Таким образом, устойчивая синхронная частица проходит через ускоряющий промежуток или во время нарастания ускоряющего поля, или во время спада [случай (16.23б)] в соответствии со знаком η . В последнем случае обычно называют синхронной фазой дополнительный угол, меньший 90° :

$$\varphi'_s = \pi - \varphi_s. \quad (16.24)$$

Этот случай ($\eta < 0$) реализуется, например, в протонном синхротроне «Сатурн». Обычно он имеет место в электронных синхротро-

нах с жесткой фокусировкой и в протонных синхротронах с жесткой фокусировкой в конце цикла*. Случай $\eta > 0$ реализуется в протонных синхротронах в начале цикла.

Синхротронные колебания с большой амплитудой

Уравнение (16.20)

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) = 0$$

имеет первый интеграл вида

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_s) = \text{const.} \quad (16.25)$$

Это выражение является константой при гамильтониане (16.18г), так как $dH/dt = \partial H/\partial t = 0$ для случая постоянных Ω и φ_s .

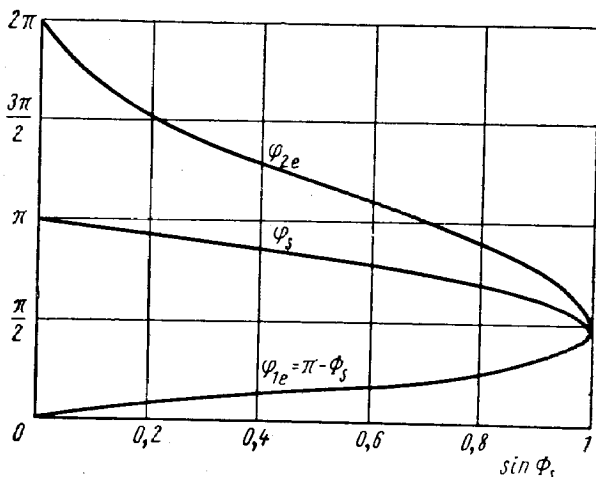


Рис. 33.

Если $\varphi(t)$ представляет собой устойчивые колебания, то существуют две точки φ_1 и φ_2 изменения направления движения, расположенные по обе стороны от φ_s , в которых $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$. Постоянная в правой части уравнения (16.25) может быть выражена через координаты точек инверсии φ_1 и φ_2 и формула (16.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_s) = - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} \times \\ \times (\cos \varphi_1 + \varphi_1 \sin \varphi_s) = - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\cos \varphi_2 + \varphi_2 \sin \varphi_s). \quad (16.26) \end{aligned}$$

* А именно при энергиях, превышающих критическую. — Прим. ред.

При отклонении фазы

$$\varphi = \pi - \varphi_s = \varphi_{1e} \quad (16.27)$$

величина $(\sin\varphi - \sin\varphi_s)$ в уравнении (16.20) обращается в нуль, а при переходе через указанное значение фазы изменяет знак. Это означает, что φ_1 есть одно из двух предельных значений фазы, при

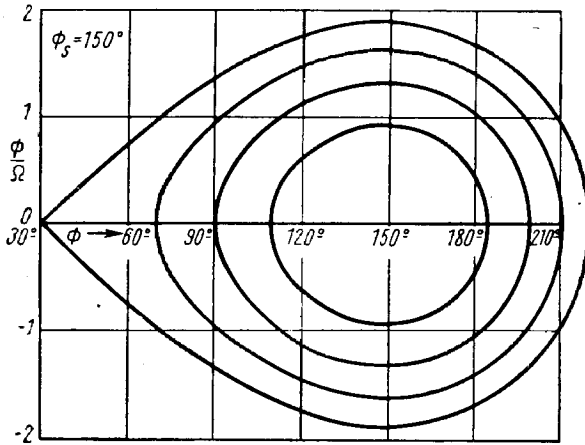


Рис. 34.

переходе через которое движение частицы становится неустойчивым. Подставляя в равенство (16.26) вместо φ_1 предельную величину φ_{1e} , получим уравнение сепаратрисы

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi_s) = - \frac{\Omega^2}{\cos \varphi_s} \times [\cos (\pi - \varphi_s) + (\pi - \varphi_s) \sin \varphi_s]. \quad (16.28)$$

Константа в правой части может быть представлена с помощью другого предельного отклонения φ_{2e} , для которого с помощью формул (16.26) и (16.27) можно получить соотношение

$$\cos (\pi - \varphi_s) + (\pi - \varphi_s) \sin \varphi_s = \cos \varphi_{2e} + \varphi_{2e} \sin \varphi_s. \quad (16.29)$$

На рис. 33 показана зависимость устойчивых φ_{1e} и φ_{2e} от φ_s

На рис. 34 и 35 графически представлен первый интеграл, являющийся параметром колебаний, в системе осей φ и φ/Ω . Эти графики называют диаграммой Бомы и Фолди. Величина этого параметра определяет, является ли движение устойчивым, неустойчивым, имеет ли место промежуточный случай — движение по сепаратрисе.

В процессе изменения фазы φ достигают экстремума при $\ddot{\varphi} = 0$, т. е. в соответствии с уравнением (16.20) при $\varphi = \varphi_s$. Подставляя

значение $\varphi = \varphi_s$ в уравнение (16.28), можно найти экстремальное значение величины

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_e^2 &= \frac{2\Omega^2}{\cos \varphi_s} [(\cos \varphi_s + \varphi_s \sin \varphi_s) - \cos(\pi - \varphi_s) - (\pi - \varphi_s) \sin \varphi_s]; \\ \dot{\varphi}_e^2 &= 2\Omega^2 [2 - (\pi - 2\varphi_s) \operatorname{tg} \varphi_s]. \end{aligned} \quad (16.30)$$

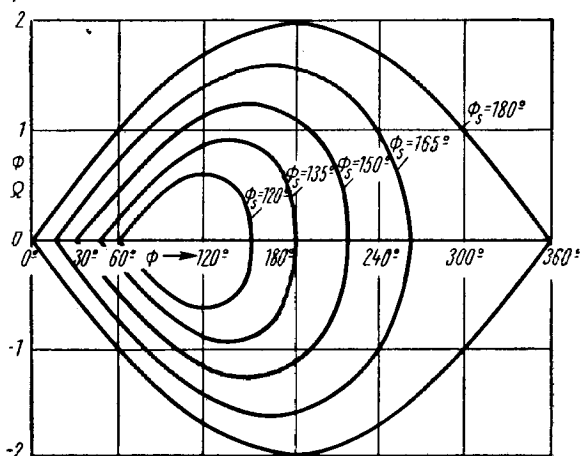


Рис. 35.

Если ввести в уравнение (16.30) величины

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_e &= \frac{\pm 1}{h\eta\omega} \dot{\varphi}_e; \\ \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_e &= \beta^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_e; \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_e &= \alpha \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_e, \end{aligned}$$

а также частоту

$$\Omega = \omega_\infty \sqrt{\frac{h\eta \cos \varphi_s e \hat{V}_{\text{ВЧ}}}{2\pi E_s}}, \quad (16.21)$$

то для предельных отклонений импульса, энергии и радиуса получим

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_e = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{ВЧ}}}{\pi h \eta E} [(\pi - 2\varphi_s) \sin \varphi_s - 2 \cos \varphi_s]}; \quad (16.31)$$

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_e = \pm \beta \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{ВЧ}}}{\pi h \eta E} [(\pi - 2\varphi_s) \sin \varphi_s - 2 \cos \varphi_s]}; \quad (16.32)$$

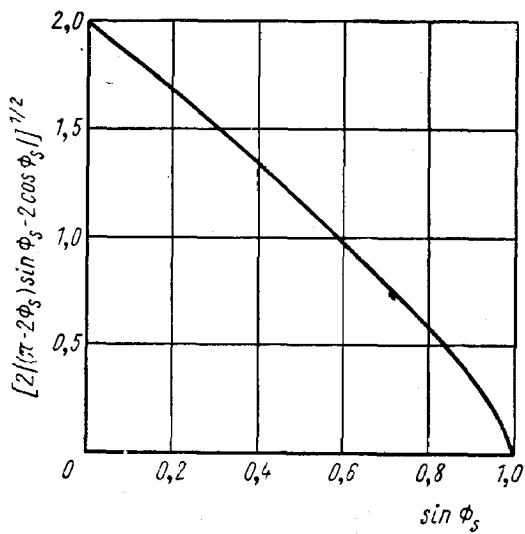


Рис. 36.

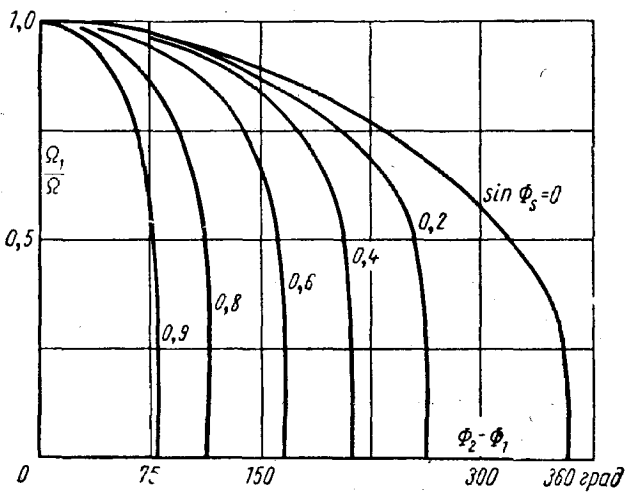


Рис. 37.

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_e = \pm \frac{\alpha}{\beta} V \sqrt{\frac{e\hat{V}_{\text{ВЧ}}}{\pi h \eta E} [(\pi - 2\varphi_s) \sin \varphi_s - 2 \cos \varphi_s]}. \quad (16.33)$$

Функция $(2|(\pi - 2\varphi_s) \sin \varphi_s - 2 \cos \varphi_s|)^{1/2}$ представлена на рис. 36, где аргументом является $\sin \varphi_s$.

Находя из уравнения (16.26) величину dt и интегрируя по одному периоду, можно найти период колебаний

$$\Delta t_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2}{\Omega} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{V f(\varphi, \varphi_s) - f(\varphi_1, \varphi_s)}, \quad (16.34)$$

где $f(\varphi, \varphi_s) = \frac{V^2}{\cos \varphi_s} (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi_s)$; Ω — угловая частота для малых амплитуд. На рис. 37 отношение Ω_1/Ω представлено как функция отклонения $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ для различных значений $\sin \varphi_s$.

Некоторые параметры ускоряющих систем протонных синхротронов «Сатурн» и ЦЕРН

Параметры	«Сатурн»	ЦЕРН
Кинетическая энергия $T_i/T_k/T_e$ (начальная, критическая, конечная)	3,6 Мэв/—/3 Гэв	50 Мэв/4,8 Гэв/28 Гэв
Кратность ускоряющего напряжения h	2	20
Предельная частота обращения $\omega_\infty/2\pi$, Мгц	4,3	0,5
Коэффициент расширения орбит α	1,91	0,026
$\gamma = (1/\gamma^2 - \alpha)$; γ_i/γ_f	—0,91/—1,84	+0,87/—0,025
Скорость нарастания поля \dot{V} , Т·сек ⁻¹	1,5	1,2
Амплитуда ускоряющего напряжения $V_{\text{ВЧ}}$, кэВ	1,94	108
Прирост энергии за оборот $\Delta V_{\text{об}}$, кэВ	1,167	54
Синхронная фаза (нач/кон), град	143	60/120
Диапазон устойчивых фаз $(\varphi_{2e} - \varphi_{1e})/2\pi$, %	48	50
Частота синхротронных колебаний (нач/кон), кгц	3/2,1	7,6/0,25
Допустимое относительное отклонение энергии (нач/кон), Мэв	$\pm 3 \cdot 10^{-3} / \pm 2,8 \times 10^{-4}$	$\pm 1,25 \cdot 10^{-3} / \pm 1,25 \cdot 10^{-5}$
Допустимое радиальное отклонение (нач/кон), мм	$\pm 70 / \pm 3,2$	$\pm 3,8 / \pm 1,3$

Глава 17

СИНХРОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

17.1. Медленные радиальные колебания синхронной частицы

Для каждого ускорителя частота обращения частицы является некоторой функцией магнитного поля и радиуса: $\omega = \omega(B_0, R)$. Синхронная частица движется по синхронной орбите, радиус R_s которой удовлетворяет соотношению $\omega(B_0, R_s) = \omega_s = \omega_{вч}/h$.

Для однородной магнитной структуры функция $\omega(B_0, R_s)$ определяется выражением (16.7). Как же изменяется в данном поле B_0 частота ω с изменением радиуса R ? Из формулы (15.10) имеем

$$\frac{R}{\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta R} = \frac{\eta}{\alpha} = \frac{E_r^2 - \alpha E^2}{\alpha E^2}. \quad (17.1)$$

Используя $\alpha = (p/R)(\Delta R/\Delta p)$ [см. формулу (15.1)] и $g(s) = (p/R)(\Delta x_f/\Delta p)$ [см. формулу (16.13)], можно получить для фиксированного поля соотношение между относительным изменением $\Delta\omega/\omega$ частоты обращения частицы и изменением радиуса Δx_f первоначальной орбиты:

$$\frac{\Delta x_f(s)}{R} = \frac{1}{\eta} g(s) \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{E^2}{E_r^2 - \alpha E^2} g(s) \frac{\Delta\omega}{\omega}. \quad (17.2)$$

Предположим, что в течение цикла ускорения частота $\omega_{вч}$ медленно отклоняется от закона (16.7), т. е. относительная скорость ее изменения мала по сравнению с частотой синхротронных колебаний:

$$\frac{1}{\omega_{вч}} \cdot \frac{d\omega_{вч}}{dt} \ll \Omega. \quad (17.3)$$

В этом случае синхротронные колебания удовлетворяют теореме адиабатичности. Это означает, что синхронная частица, определяемая условием $\oint pdq = 0$, остается практически синхронной, но радиус ее орбиты изменяется в соответствии с соотношением (17.2).

Аналогичным образом в ускорителях с постоянным полем и переменным градиентом (*FFAG*) средний радиус орбиты, который определяет среднюю энергию, адиабатически изменяется при медленном изменении частоты ускоряющего поля. В синхротронах медленные изменения $\omega_{вч}$ используются для смещения пучка по радиусу к мишени.

17.2. Быстрые флуктуации параметров

Введение. Идеализированный процесс ускорения нарушается возмущениями, которые нельзя считать медленными по сравнению с частотой синхротронных колебаний. Эти возмущения приводят к

появлению вынужденных когерентных колебаний фазы частиц. Ниже будет рассмотрено влияние флуктуаций $\delta V_{вч}$ и $\delta \omega_{вч}$ амплитуды и частоты ускоряющего поля, а также флуктуаций δB_0 магнитного поля.

Учет быстрых флуктуаций δB_0 важен для электромагнитов, которые питаются выпрямленным током. Эти флуктуации вызываются остаточными пульсациями тока возбуждения, имеющими постоянную частоту. Частота синхротронных колебаний изменяется во время цикла ускорения и может проходить через резонанс с частотой этих возмущений или ее гармониками.

Погрешности $\delta V_{вч}$ и $\delta \omega_{вч}$ — это шумы ускоряющего поля. Ниже будет получено уравнение для возмущений синхротронных колебаний этими погрешностями и найдено его решение, соответствующее различным типам возмущений.

Модуляция магнитного поля. Для синхротрона «Сатурн» источником возбуждения магнита служит двенадцатифазный выпрямитель $12 \times 70 = 840$ *гц*. В табл. 4 приведены величины пульсаций напряжения питания электромагнита (в процентах) для различных гармоник в начале ($t = 0$), в середине ($t = 450$ *мсек*) и в конце цикла ускорения ($t = 900$ *мсек*). U_0 — постоянная составляющая напряжения, $U_0 \approx 6$ *кв*. Максимальный ток равен примерно 4,5 *ка*.

Т а б л и ц а 4

Величина пульсаций напряжения питания

<i>f</i> , <i>гц</i>	Величина пульсаций, %			<i>f</i> , <i>гц</i>	Величина пульсаций, %		
	<i>t</i> =0	<i>t</i> =450 <i>мсек</i>	<i>t</i> =900 <i>мсек</i>		<i>t</i> =0	<i>t</i> =450 <i>мсек</i>	<i>t</i> =900 <i>мсек</i>
840	1,4	2,8	10,8	4200	0,055	0,84	2,15
1680	0,35	2	5,35	5040	0,038	0,69	1,79
2520	0,155	1,4	3,58	5880	0,028	0,61	1,53
3360	0,087	1	2,64				

Величина паразитной пульсации поля составляет лишь малую часть величины пульсаций напряжения:

$$\frac{\delta B}{B} : \frac{\delta U}{U} = f^{-1} : \frac{B}{U}. \quad (17.4)$$

Уравнение синхротронных колебаний при наличии возмущений. В отсутствие возмущений уравнение ускорения для одной частицы может быть записано в виде $2\pi R \dot{p} = e \hat{V}_{вч} \sin \varphi$ [см. формулу (16.15а)]. Произведение Rp , следовательно, является функцией $\hat{V}_{вч}$ и φ .

В отсутствие погрешностей уравнение для отклонения $\Delta(Rp)$ какой-либо частицы относительно синхронной может быть получено, если развернуть выражение

$$\Delta(Rp) = (\partial/\partial\varphi)(Rp) \Delta\varphi.$$

При наличии погрешности $\delta\dot{V}_{ВЧ}$ предыдущее выражение принимает вид

$$\Delta(R\dot{p}) = \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} (R\dot{p}) \right] (\varphi - \varphi_s) + \left[\frac{\partial}{\partial\dot{V}_{ВЧ}} (R\dot{p}) \right] \delta\dot{V}_{ВЧ};$$

кроме того,

$$2\pi\Delta(R\dot{p}) = 2\pi \frac{d}{dt} (R_s \Delta p) = \frac{d}{dt} W \text{ [см. формулы (16.17) и (16.18)]}$$

Выполняя дифференцирование, можно получить первое уравнение движения

$$\frac{d}{dt} W = 2\pi \frac{d}{dt} (R_s \Delta p) = e\dot{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s \Delta\varphi + e\dot{V}_{ВЧ} \sin \varphi_s \frac{\delta\dot{V}_{ВЧ}}{\dot{V}_{ВЧ}}, \quad (17.5a)$$

соответствующее уравнению невозмущенного движения (16.18a).

Введем теперь погрешности поля δB и изменения высокой частоты $\delta\omega_{ВЧ}$ в уравнение (16.18б), прибавляя к величине

$$\dot{\varphi} = -h(\omega - \omega_s) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h\eta\omega_s}{R_s \rho_s} W$$

член

$$\delta\dot{\varphi} = -h \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial B} \right)_p \delta B - \delta\omega_s \right]$$

с учетом того, что

$$\frac{B}{\omega} \left(\frac{\partial\omega}{\partial B} \right)_p = -\frac{B}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial B} \right)_p = \frac{\rho}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho} \right)_B = \alpha \text{ (см. формулу (15.1))}$$

и

$$h\delta\omega_s = \delta\omega_{ВЧ}.$$

Таким образом, второе уравнение движения (16.18б) принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h\eta\omega_s}{R_s \rho_s} W - h\alpha\omega_s \frac{\delta B}{B} + \delta\omega_{ВЧ}. \quad (17.5б)$$

Параметры уравнений движения очень мало изменяются за время одной флуктуации и потому могут здесь считаться константами. Дифференцируя с учетом этого предположения по времени уравнение (17.5б) и исключая $(d/dt)W$ с помощью (17.5a), можно получить одно уравнение второго порядка для возмущенных фазовых колебаний

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \Delta\varphi = -h\alpha\omega \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta B}{B} \right) + \frac{d}{dt} (\delta\omega_{ВЧ}) - \Omega^2 \operatorname{tg} \varphi_s \frac{\delta\dot{V}_{ВЧ}}{\dot{V}_{ВЧ}}, \quad (17.6)$$

где Ω — частота синхротронных колебаний.

Это уравнение наглядно показывает относительную важность погрешности $\delta B/B$ для машин со слабой фокусировкой (α велико).

Оно показывает также, что погрешность одного вида может быть нейтрализована изменением в противоположном направлении другого члена уравнения. На практике это обстоятельство используют, нейтрализуя пульсации δB с помощью автоматического изменения в противоположном направлении величины $\delta\omega_{вч}$, получаемой от системы автоматического регулирования частоты ускоряющего поля, учитывающей радиальное положение пучка.

Решение уравнения синхротронных колебаний при наличии возмущений. Уравнение при наличии возмущений записывается в виде

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = f(t).$$

Найдем его частное решение $\varphi(t)$ для различных видов функций возмущения $f(t)$.

1. Возмущение $f(t) = a \sin Wt$. Решение:

$$\varphi(t) = \frac{a}{\Omega^2 - W^2} \sin Wt. \quad (17.7)$$

2. Возмущение $f(t)$ произвольного вида. Решение имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{t_0}^t f(\lambda) \sin \Omega(t - \lambda) d\lambda, \quad (17.8)$$

что может быть проверено подстановкой его в дифференциальное уравнение.

3. Прохождение через резонанс

$$f(t) = a \sin W(t)dt,$$

где частота $W(t)$ проходит через значение Ω .

Подставив приращение $W(t)$ как функцию времени t , отсчитываемого от момента $t = 0$ совпадения частот, имеем $W = \Omega + \dot{W}t + \dots$ и, соответственно,

$$f(t) = a \sin \int_{t=0}^t W dt = a \sin \int_0^t [\Omega + \dot{W}t] dt = a \sin \left[\Omega t + \frac{\dot{W}t^2}{2} \right].$$

Принимая во внимание решение (17.8), получаем решение данного уравнения в виде

$$\varphi(t) = \frac{a}{\Omega} \int_{-\infty}^t \sin [\Omega\lambda + 1/2 \dot{W}\lambda^2] \sin \Omega(t - \lambda) d\lambda.$$

Выражая произведение двух синусов через сумму

$$\varphi(t) = 1/2 \frac{a}{\Omega} \times \left\{ \int_{-\infty}^t \cos [-\Omega(t - 2\lambda) + 1/2 \dot{W}\lambda^2] d\lambda - \int_{-\infty}^t \cos [\Omega t + 1/2 \dot{W}\lambda^2] d\lambda \right\},$$

можно видеть, что только второй член является резонансным. Пренебрегая первым членом и произведя замену $\left(\frac{1}{2}\right) \dot{W} \lambda^2 = x^2$;

$d\lambda = \sqrt{2/\dot{W}} dx$, получим

$$\varphi = -\frac{a}{\Omega} \sqrt{\frac{1}{2\dot{W}}} \left\{ \cos \Omega t \int_{-\infty}^t \cos(x^2) dx - \sin \Omega t \int_{-\infty}^t \sin(x^2) dx \right\}.$$

Распространив верхний предел обоих интегралов Френеля до бесконечности, можно получить:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Используя далее равенство $\cos \Omega t - \sin \Omega t = \sqrt{2} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, находим

$$\varphi(t) = -\frac{a}{\Omega} \sqrt{\frac{\pi}{2\dot{W}}} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right). \quad (17.9)$$

Эти колебания возбуждаются при прохождении через резонанс. В тех случаях, когда частота $\Omega = \Omega(t)$, следует заменить в уравнении (17.9) величину \dot{W} (на $\dot{W} - \Omega$).

4. Влияние шумовых возмущений. Рассмотрим вначале уравнение колебаний $\ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = f_0(t)$ с резонансным возмущением в правой части

$$f_0(t) = \hat{a} \sin \Omega t. \quad (17.10)$$

Это возмущение создает колебания с возрастающей амплитудой $\varphi = \frac{\hat{a}t}{2\Omega} \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Спустя время $\Delta T \gg \Omega^{-1}$ амплитуда колебаний

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{a} \Delta T}{2\Omega}. \quad (17.11)$$

Если функция $f(t)$ в правой части уравнения ограничена по длительности интервалом времени ΔT , то ее спектр содержит полосу частот W . Можно записать f_0 в виде интеграла Фурье:

$$f_0(t) = \int_0^{\infty} \hat{g}(W) \sin Wt dW. \quad (17.12)$$

Функции f_0 , отличной от нуля в интервале времени ΔT , соответствует спектр $\hat{g}(W)$, отличный от нуля в относительно узкой полосе частот (в окрестностях Ω):

$$\Delta W \approx \frac{2\pi}{\Delta T}. \quad (17.13)$$

Доказательство этого положения* аналогично обоснованию принципа неопределенности Гейзенберга, одним из аналогов которого и является в сущности формула (17.13).

Внутри полосы ΔW приближенно $\hat{g} = \text{const}$, $W \approx \Omega$, что в соответствии с формулами (17.10) и (17.12) дает

$$\hat{g} \Delta W = \hat{g} \frac{2\pi}{\Delta T} \approx \hat{a}. \quad (17.14)$$

Переходя теперь к рассмотрению правой части $f(t)$, соответствующей шуму, спектр которого заключен в полосе частот W , можно записать

$$f(t) = \int_0^{\infty} \hat{g}_W \sin(Wt + \delta_W) dW, \quad (17.15)$$

где \hat{g}_W и δ_W — случайные величины.

Для анализа можно выделить из шума его компоненту $f_{\Delta W}(t)$, соответствующую области частот ΔW . Для стационарного шума «средняя мощность» этой компоненты, обозначаемая $f_{\Delta W}^2$, пропорциональна величине ΔW . Если записать эту мощность в виде $K(W)dW$, то $K(W)$ — величина спектральной плотности мощности шума на частоте W . На интервале времени ΔT колебания f возбуждаются главным образом резонансными частотами $W \approx \Omega$, содержащимися в шуме, заключенном в сравнительно узкой полосе $\Delta W = 2\pi/\Delta T$ около Ω . Более далекие частоты спектра не остаются в фазе за время ΔT с собственной частотой осциллятора Ω .

Пусть K — спектральная плотность мощности вблизи резонансной частоты осциллятора Ω . В соответствии с формулой (17.15)

$$\frac{df}{dW} = \hat{g}_W \sin(Wt + \delta_W),$$

где \hat{g}_W и δ_W взаимно независимы и, следовательно,

$$K = \overline{\hat{g}_W^2 \sin^2(Wt + \delta_W)} = 1/2 \overline{\hat{g}_W^2}. \quad (17.16)$$

* См. также А. А. Харкевич. «Спектры и анализ», изд. 2, ГИТТЛ, М., 1953. — Прим. ред.

При заданном распределении фаз δ_w и при условии (17.14) величина $(\overline{g^2})^{1/2} (2\pi/\Delta T)$ эквивалентна монохроматическому резонансному возмущению f_0 с амплитудой

$$\hat{a} = \sqrt{\overline{g^2}} \frac{2\pi}{\Delta T} = \sqrt{-\frac{4\pi}{\Delta T} K}. \quad (17.17)$$

За время ΔT такой шум возбуждает колебания с амплитудой

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{a} \Delta T}{2\Omega} = \sqrt{\frac{\pi K \Delta T}{\Omega^2}}. \quad (17.18)$$

Каким бы ни было распределение фаз шума, характеризуемого спектральной плотностью мощности K , за время ΔT он возбуждает колебания, амплитуда которых в среднем приблизительно равна найденной величине.

Глава 18

АДИАБАТИЧЕСКОЕ ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Адиабатическая теорема Эренфеста гласит: если параметры, характеризующие незатухающий осциллятор, медленно изменяются, то канонические переменные движения изменяются таким образом, что интеграл действия остается постоянным

$$I(t) = \oint p dq = \text{const}. \quad (18.1)$$

Интеграл берется за один период колебаний.

Предполагается также, что колебания частицы по трем координатам x , z и φ независимы; в качестве пары канонических переменных выбраны энергия H и время t .

18.1. Затухание фазовых колебаний

Гамильтониан фазовых колебаний дается выражением (16.18 г). С точностью до величин второго порядка относительно канонических переменных гамильтониан

$$H = -1/2 eV_{вч} \cos \varphi_s (\Delta\varphi)^2 - \pi \frac{h\eta\omega}{\rho R} (R \Delta\rho)^2 = \text{const} \quad (18.2)$$

на одном периоде. На основании формулы (18.1)

$$I(t) = \int H dt = H \Delta t = \text{const}. \quad (18.3)$$

Одна из переменных достигает максимума, когда вторая равна нулю:

$$\begin{aligned} H &= -1/2 e\hat{V}_{вч} \cos \varphi_s (\widehat{\Delta\varphi})^2 = \\ &= -\pi \frac{h\eta\omega R}{\rho} (\widehat{\Delta\rho})^2 = -\pi \frac{h\eta c^2}{E} (\widehat{\Delta\rho})^2. \end{aligned} \quad (18.4)$$

С другой стороны [см. формулу (16.21)],

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_\infty} \sqrt{\frac{2\pi E}{h\eta \cos \varphi_s e \hat{V}_{ВЧ}}} \quad (18.5)$$

Из выражений (18.3) и (18.5) получаются законы затухания для фазы и импульса:

$$\widehat{\Delta\varphi} \sim \sqrt[4]{\frac{\eta}{R^2 E \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}}; \quad (18.6)$$

$$\widehat{\Delta p} \sim \sqrt[4]{\frac{E \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{\eta R^2}}. \quad (18.7)$$

Соответственно для амплитуды радиальных колебаний можно записать:

$$\widehat{\Delta R_s} = \alpha \frac{R}{p} (\widehat{\Delta p}) = \frac{\alpha c^2}{E\omega} \widehat{\Delta p}$$

или

$$\widehat{\Delta R_s} \sim \frac{\alpha}{\omega} \sqrt[4]{\frac{\hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{E^3 R^2 \eta}}, \quad (18.8)$$

а для смещения по энергии $\Delta E = R\omega/\widehat{\Delta p}$

$$\widehat{\Delta E} \sim \omega \sqrt[4]{\frac{ER^2 \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{\eta}}. \quad (18.9)$$

18.2. Затухание бетатронных колебаний

Колебаниям $y(t)$ гармонического осциллятора с массой m и угловой частотой ω соответствует гамильтониан

$$H(y, p_y) = \frac{m\omega^2 y^2}{2} + \frac{p_y^2}{2m}. \quad (18.10)$$

Если предположить, что m и ω медленно изменяются по сравнению с периодом колебаний

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (18.11)$$

так что

$$H = \frac{m\omega^2 \hat{y}^2}{2} = \text{const за время } \Delta t, \quad (18.12)$$

то в соответствии с формулой (18.1)

$$\left. \begin{aligned} I(t) &= \int_t^{t+\Delta t} H dt = \pi m \omega \hat{y}^2(t) = \text{const}, \\ \hat{y}(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{m\omega}}. \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

откуда

Для бетатронных колебаний $m = p/v$; $\omega = v(v/R)$, где v — число бетатронных колебаний за один оборот. Следовательно, амплитуда бетатронных колебаний изменяется так, что

$$\hat{y}(t) \sim \sqrt{\frac{R}{vp}}. \quad (18.14)$$

В течение цикла ускорения в синхротроне $R = \text{const}$, $v = \text{const}$, $p \sim B$, и, значит,

$$\hat{y} \sim B^{-1/2}, \quad (18.14a)$$

т. е. амплитуда бетатронных колебаний изменяется обратно пропорционально корню из величины магнитного поля.

Глава 19

КРИТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Коэффициент

$$\eta = \frac{p}{\omega} \left(\frac{d\omega}{dp} \right)_B = \text{const} = \left(\frac{E_r}{E} \right)^2 - \alpha, \quad (19.1)$$

где

$$\alpha = \frac{p}{R} \left(\frac{dR}{dp} \right)_B = \text{const}$$

в процессе ускорения уменьшается. Обычно этот коэффициент отрицателен. Однако в протонных синхротронах с переменным градиентом он положителен в начале цикла ускорения и проходит через нуль во время цикла. Энергия, при которой он проходит через нуль, называется энергией перехода, или критической энергией

$$E_k = \frac{E_r}{\sqrt{\alpha}}. \quad (19.2)$$

Обычно допустимо приближенное выражение $\alpha \approx \frac{1}{v_x^2}$, что дает

$$E_k \approx v_x E_r. \quad (19.3)$$

Для того чтобы фазовые колебания оставались все время устойчивыми, $\cos \varphi_s$ должен изменять знак в тот момент времени, когда из-

меняет знак параметр η^* [см. формулу (16.23)], иначе говоря, фаза φ в соответствующий момент времени должна совершить скачок величиной $\pi - 2\varphi_s$. Этот скачок может быть осуществлен, например, введением в частоту ускоряющего поля скачка $\delta\omega_{ВЧ}$ за время, меньшее чем $\delta T = (\pi - 2\varphi_s)/\delta\omega_{ВЧ}$.

Оценим амплитуду радиальных и фазовых отклонений синхротронных колебаний, которые возбуждаются в районе критической энергии. Уравнение линеаризованных фазовых колебаний (16.19) может быть записано в окрестности $\eta = 0$ в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{\omega_\infty^2 h e \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{2\pi E} \Delta\varphi = 0. \quad (19.4)$$

В случае адиабатического изменения параметров интеграл уравнения фазовых колебаний имеет вид [см. формулу (18.6)]

$$\Delta\varphi = (\varphi - \varphi_s) = C \sqrt[4]{\frac{\eta}{R^2 E \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}} \cos \left(\int_0^t \Omega dt + \delta_1 \right), \quad (19.5)$$

где

$$\Omega = \omega_\infty \left(\frac{e \hat{V}_{ВЧ} h \eta \cos \varphi_s}{2\pi E} \right)^{1/2}. \quad (19.6)$$

В соответствии с формулами (15.12) и (16.13) можно написать, что

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{-\alpha}{h\omega\eta} \varphi \quad (19.7)$$

и, следовательно,

$$\frac{\widehat{\Delta R}}{R} = C\alpha \frac{\omega_\infty}{\omega} \left[\frac{e^2 \hat{V}_{ВЧ} \cos \varphi_s}{(2\pi)^2 E^3 R^2 \eta h^2} \right]^{1/4}. \quad (19.8)$$

В соответствии с формулами (19.5) и (19.8) амплитуды колебаний при переходе через $\eta = 0$ были бы

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{\Delta\varphi})_h &= 0; \\ (\widehat{\Delta R})_h &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Однако это утверждение предполагает, что η изменялось достаточно медленно, чтобы выполнялось условие адиабатичности

$$\left| \frac{\dot{\eta}}{\eta} \cdot \frac{1}{\Omega} \right| \lesssim 1. \quad (19.10)$$

В действительности амплитуды колебаний не имеют достаточного времени, для того чтобы достичь экстремальных величин (19.9).

* Известны другие варианты перехода через критическую энергию. См., например, Коломенский А. А. Сабсович Л. Л., ЖТФ, 26, 576 (1956); CERN Symposium, 1, 112 (1956). — Прим. ред.

Чтобы определить амплитуды $(\Delta\hat{\Phi}_k)$ и $(\Delta\hat{R})_k$, действительно получающиеся при переходе через критическую энергию, следует проинтегрировать уравнение (19.4) в малой области Δt в окрестности момента перехода через критическую энергию t_k , где нарушается теорема адиабатичности. В этой области можно считать все параметры уравнения (19.5), за исключением параметра η , постоянными величинами, равными их значениям при переходе через критическую энергию.

На основании формул (15.7) и (19.2) получаем

$$\eta = \frac{E_r^2}{E^2} - \frac{E_r^2}{E_k^2} = \frac{E_r^2 (E_k + E) (E_k - E)}{E^2 E_k^2}.$$

В интервале Δt $E \approx E_k$ и $\eta \approx \frac{2E_0^2}{E_k^3} \left(\frac{dE}{dt} \right)_k (t_k - t)$. Кроме того,

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_k = \left(\frac{\omega e \hat{V}_{\text{ВЧ}} \sin \varphi_s}{2\pi} \right)_k,$$

т. е.

$$\eta = A(t_k - t),$$

где

$$A = \left(\frac{E_0^2 \omega e \hat{V}_{\text{ВЧ}} \sin \varphi_s}{E^3 \pi} \right)_k \left. \vphantom{A} \right\}. \quad (19.11)$$

Подставляя выражение для η из уравнения (19.11) в уравнение (19.4) и решая его, получим

$$\Delta\Phi = \eta^{1/4} X^{1/2} [aJ_{2/3}(X) + bN_{2/3}(X)] \dots, \quad (19.12)$$

где a и b — произвольные постоянные, $J_{2/3}$ и $N_{2/3}$ — функции Бесселя и Неймана, а

$$X = \int_t^{t_k} \Omega dt. \quad (19.13)$$

Учитывая формулы (19.6) и (19.11), получаем

$$X = B(t_k - t)^{3/2}, \quad (19.14)$$

где

$$B = \frac{2^{1/2}}{3\pi} \omega_\infty \left[\frac{e \hat{V}_{\text{ВЧ}} E_0}{E^2} (\omega_0 \hbar \cos \varphi_s \sin \varphi_s)^{1/2} \right]_k.$$

Разлагая выражение (19.12) в ряд по малому параметру X , получаем

$$\Delta\Phi = \eta^{1/4} X^{1/2} \left[\left(a - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{\Gamma(5/3)} \left(\frac{X}{2} \right)^{2/3} - \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{X}{2} \right)^{-2/3} \right] =$$

$$= -\frac{2^{5/3} b}{3^{1/2} \Gamma(1/3)} \eta^{1/4} X^{-1/6} + \frac{2^{-2/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{1/2} \Gamma(5/3)} \eta^{1/4} X^{7/6} \dots, \quad (19.15)$$

где $\Gamma(1/3) = 2,66$; $\Gamma(5/3) = 0,902$.

Далее выражаем η и X как функции времени с помощью формул (19.11) и (19.14)

$$\left. \begin{aligned} \eta^{1/4} X^{-1/6} &= A^{1/4} B^{-1/6}; \\ \eta^{1/4} X^{7/6} &= A^{1/4} B^{7/6} (t_k - t)^2; \\ \Delta\varphi &= -\frac{2^{5/3} b}{3^{1/2} \Gamma(1/3)} A^{1/4} B^{-1/6} + \\ &+ \frac{2^{-2/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{1/2} \Gamma(5/3)} A^{1/4} B^{7/6} (t_k - t)^2; \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

$$\Delta\varphi = -\frac{2^{5/3} b}{3^{1/2} \Gamma(1/3)} A^{1/4} B^{-1/6} + \dots = \Delta\varphi_k; \quad (19.17)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{2^{1/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{1/2} \Gamma(1/3)} A^{1/4} B^{7/6} (t_k - t);$$

$$\frac{\dot{\varphi}}{\eta} = -\frac{2^{1/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{1/2} \Gamma(5/3)} A^{-3/4} B^{7/6} = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\eta} \right)_k;$$

$$\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_k = \left(\frac{\alpha\varphi}{h\omega\eta} \right)_k = -\frac{2^{1/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{1/2} \Gamma(5/3)} \left(\frac{\alpha}{h\omega} \right)_k A^{-3/4} B^{7/6}. \quad (19.18)$$

Величины (19.17) и (19.18) являются окончательными, определенными в противоположность (19.9) для случая адиабатического изменения параметров.

Удобно представить результаты (19.17) и (19.18) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_k &= -\frac{2^{3/2} b}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} K_b; \\ \left(\frac{\Delta R}{R} \right)_k &= \left(\frac{\alpha\varphi}{h\omega\eta} \right)_k = \\ &= -\frac{2^{1/3} (a\sqrt{3} - b)}{3^{5/2} \Gamma(5/3)} \left(\frac{\alpha}{K_b} \right) \left[\frac{\omega_\infty}{\omega} \sqrt{\frac{e\hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{\pi E h}} \right]_k, \end{aligned} \right\} \quad (19.19)$$

где

$$K_b = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/6} A^{1/4} B^{-1/6} = \left[\frac{2\omega^2 E_r^4 e\hat{V}_{\text{ВЧ}} \sin^2 \varphi_s}{\pi\omega_\infty^2 E^5 h \cos \varphi_s} \right]_k^{1/12}.$$

Сопоставим амплитуды после перехода через критическую энергию с начальными амплитудами.

Для величины X (19.14) можно ввести в интеграл (19.12) асимптотическое представление функций $J_{3/2}$ и $N_{3/2}$. В результате получается

$$\Delta\varphi = \eta^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[a \cos \left(X - \frac{7\pi}{12} \right) + b \sin \left(X - \frac{7\pi}{12} \right) \right] = \\ = \widehat{\Delta\varphi} \cos(-X + \delta_2) = \widehat{\Delta\varphi} \cos \left(\int_k^t \Omega dt + \delta_2 \right), \quad (19.20)$$

где

$$\widehat{\Delta\varphi} = \eta^{1/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (a^2 + b^2); \quad (19.20a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &= \psi + \frac{7}{12} \pi; \\ \operatorname{ctg} \psi &= \frac{a}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (19.20b)$$

Уравнения (19.20) описывают гармонические колебания с медленно изменяющейся частотой, амплитуда и фаза которых зависят от коэффициентов a и b . ($\Delta\varphi_s$) пропорционально $\sqrt{a^2 + b^2}$, а фаза зависит от отношения a/b .

Выражение (19.20) согласуется с адиабатическим решением (19.5). Считая амплитуды обоих случаев одинаковыми, получаем

$$\sqrt{a^2 + b^2} = C \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{R^2 E \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s} \right]_k^{1/4}. \quad (19.21)$$

Амплитуды колебания во время перехода через критическую энергию в соответствии с формулой (19.19) зависят: $\Delta\varphi_k$ от b , а $(\Delta R/R)_k$ от $(a\sqrt{3} - b)$.

На основании (19.20) отношение a/b характеризует фазу синхротронных колебаний. Предполагая, что все фазы присутствуют в колебаниях и, в частности, для колебаний с одинаковой амплитудой, т. е. с заданной величиной $\sqrt{a^2 + b^2}$, $b = b_M$, $a\sqrt{3} - b = (a\sqrt{3} - b)_M$. Можно показать, что для заданных $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\left. \begin{aligned} b_M &= \sqrt{a^2 + b^2}; \\ (a\sqrt{3} - b)_M &= 2\sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Подставляя эти результаты с учетом формул (19.21) и (19.19), получаем

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\Delta\varphi}_k &= C \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} \left[\frac{1}{R^2 E \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s} \right]_k^{1/4} K_b; \\ (\widehat{\Delta R/R})_k &= C \frac{2^{3/2}}{3^{5/3}} \cdot \frac{1}{\Gamma(5/3)} \cdot \frac{\alpha \omega_r}{K_b \omega_k} \left(\sqrt[4]{\frac{e \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{R^2 E^3 \hbar^2}} \right)_k. \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

С другой стороны, в начальный момент времени t_i [см. формулы (19.5) и (19.8)]

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\Delta\varphi}_i &= C \left[\sqrt[4]{\frac{\eta}{R^2 E \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}} \right]_i; \\ (\widehat{\Delta R/R})_i &= C \left[\alpha \frac{\omega_\infty}{\omega} \left(\frac{e^2 \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{2\pi^3 E^3 R^2 \eta h^2} \right)^{1/4} \right]_i. \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Окончательно имеем

$$\frac{(\varphi - \varphi_s)_k}{(\varphi - \varphi_s)_i} = \frac{2\sqrt{\pi} K_b}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} \left[\frac{(R^2 E \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s)_i}{\eta_i (R^2 E \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s)_k} \right]^{1/4}; \quad (19.25)$$

$$\frac{(\widehat{\Delta R/R})_k}{(\widehat{\Delta R/R})_i} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3^{5/3} \Gamma(5/3)} \cdot \frac{1}{K_b} \cdot \frac{\omega_i}{\omega_k} \sqrt[4]{\eta_i \frac{\left(\frac{\hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{R^2 E^3} \right)_h}{\left(\frac{\hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{R^2 E^3} \right)_i}}. \quad (19.26)$$

Часть пятая

ВЛИЯНИЕ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОНА

Глава 20

ИЗЛУЧАЕМАЯ МОЩНОСТЬ

20.1. Уравнения электромагнитного поля

Уравнения Максвелла в вакууме имеют вид:

$$c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (20.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (20.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (20.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (20.4)$$

Решение этих уравнений облегчается, если ввести потенциалы φ и \mathbf{A} , определяемые так, что

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (20.5a)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (20.5b)$$

Эти решения вполне корректны, так как при подстановке (20.5a) в (20.4) и (20.5b) в (20.3) получаются известные математические тождества. Кроме того, для однозначного определения поля на вектор \mathbf{A} накладывают условие Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (20.6)$$

благодаря которому уравнения для потенциалов принимают простую форму.

Подставляя формулы (20.5a и б) в уравнения (20.1) и (20.2) и используя условие (20.6), а также векторные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}; \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \Delta \varphi \end{aligned} \right\} \quad (20.7)$$

придем к уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (20.8a)$$

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \quad (20.8б)$$

частные решения которых имеют вид

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \left(\frac{\rho}{r} \right)_{t'=t-r/c} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3; \quad (20.9a)$$

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \iiint \left(\frac{\partial}{r} \right)_{t'=t-r/c} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (20.9б)$$

Радиус-вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ обозначает точку наблюдения, а $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — точку области, по которой производится интегрирование, $\rho = \rho(\xi, t')$, $\delta = \delta(\xi, t')$,

$$r = r(\mathbf{x}, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}, \quad (20.10)$$

и $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi = r\mathbf{n}$.

Решения (20.9a) и (20.9б) относятся к безграничному пространству и обладают свойством аддитивности. Нетрудно видеть, что потенциалы системы движущихся зарядов по форме совпадают с потенциалами неподвижных зарядов и стационарных токов и отличаются лишь тем, что подынтегральные выражения относятся к предыдущему моменту времени $t' = t - r/c$. Полученные решения обычно называют запаздывающими потенциалами. Уравнения (20.8a) и (20.8б), так же как и их интегралы, имеют одинаковый вид, поэтому достаточно рассмотреть лишь первое из этих уравнений.

Разобьем область интегрирования на две части сферой радиусом r_1 с центром в точке наблюдения \mathbf{x} и обозначим пространство внутри сферы V_1 , а вне ее V_2 . Выразим затем потенциал $\varphi(\mathbf{x})$ в виде суммы воздействий зарядов, находящихся в областях V_1 и V_2 :

$$4\pi\varepsilon_0 \varphi = 4\pi\varepsilon_0 (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_{V_1} \left(\frac{\rho}{r} \right)_{t'=t-r/c} d^3\xi + \int_{V_2} \left(\frac{\rho}{r} \right)_{t'=t-r/c} d^3\xi. \quad (20.11)$$

В малой области V_1 запаздыванием можно пренебречь. При этом соотношение $4\pi\varepsilon_0\varphi_1 = \int (\rho/r) d^3\xi$ совпадает со статическим случаем и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi_1 = -(\rho/\varepsilon_0)$. Оно удовлетворяет также и уравнению (20.8a):

$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (20.12)$$

поскольку при $r \rightarrow 0$ $\varphi_1 \rightarrow 0$ и $(\partial^2\varphi_1/\partial t^2) \rightarrow 0$. Докажем теперь, что потенциал

$$4\pi\varepsilon_0 \varphi_2(\mathbf{x}, t) = \int_{V_2} (\rho/r)_{t'=t-r/c} d^3\xi, \quad (20.13)$$

который зависит от воздействия зарядов вне сферы, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Phi_2 - (1/c^2) (\partial^2 \Phi_2 / \partial t^2) = 0. \quad (20.12a)$$

Применим к равенству (20.13) оператор Δ и поменяем местами в правой части его символ Δ и символ интегрирования. Оператор Δ действует лишь на переменную x , а переменная ξ при этом считается постоянной. В функции $f = \rho/r$, к которой здесь применяется оператор Δ , переменная x входит только через расстояние r :

$$f = \frac{\rho(\xi, t')}{r} = \frac{\rho(\xi, t-r/c)}{r} = f[r(\mathbf{x})].$$

Если записать оператор Δ в сферических координатах r, θ, φ ($x_1 = r \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \theta$), взяв за начало координат точку ξ , то для функции, зависящей лишь от абсолютного значения вектора \mathbf{r} , получим

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 [rf(r)]}{\partial r^2}, \end{aligned}$$

т. е. $\Delta \frac{\rho}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}$. С другой стороны, нетрудно убедиться, что функция вида $g(t - r/c)$ удовлетворяет соотношению $\partial^2 g / \partial r^2 = = (1/c^2) \partial^2 g / \partial t^2$ и, значит,

$$\Delta \frac{\rho}{r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2},$$

$$\text{откуда } 4\pi \epsilon_0 \Delta \Phi_2 = \int_{V_2} \left(\Delta \frac{\rho}{r} \right) d^3 \xi = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_2} \frac{\rho}{r} d^3 \xi = \frac{4\pi \epsilon_0}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta \Phi_2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 0. \quad (20.12b)$$

Складывая уравнения (20.12) и (20.12a), получаем для $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ искомое равенство (20.8a).

20.2. Потенциалы Лиенара—Вихерта

Для описания поля движущегося точечного заряда можно переписать формулы (20.9a) и (20.9б) в эквивалентном виде с использованием дельта-функции Дирака $\delta(t')$:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\xi, t')}{r(\xi, t')} \delta(t' - t + r/c) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 dt'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \iiint \frac{\mathbf{j}(\xi, t')}{r(\xi, t')} \delta(t' - t + r/c) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 dt'. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

В случае точечного заряда расстояние r до точки наблюдения можно считать постоянным, и интегрирование по координатам ξ_i дает заряд q для скалярного потенциала и произведение $q\beta c$ для векторного. Если заряд является электроном ($q = e \leq 0$), то потенциалы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r(t')} \delta(t' - t + r(t')/c) dt'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{r(t')} \delta(t' - t + r(t')/c) dt'. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Поскольку в аргумент дельта-функции Дирака входит не просто t' , а переменная $\theta(t') = t' + r(t')/c$, введем ее в качестве новой переменной, для которой $\frac{d\theta}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{dr}{dt'} = 1 - n\beta$. Последнее равенство вытекает из соотношений

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})^2; \\ 2r\dot{r} &= -2(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}} = -2r\dot{\boldsymbol{\xi}}; \\ \dot{r} &= \frac{dr}{dt'} = -\frac{r}{r} \dot{\boldsymbol{\xi}} = -n\beta c. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Таким образом,

$$\delta\left(t' - t + \frac{r(t')}{c}\right) dt' = \frac{\delta(\theta - t)}{d\theta/dt'} d\theta = \frac{\delta(\theta - t)}{1 - n\beta} d\theta. \quad (20.17)$$

Это выражение подставим в уравнения (20.15) и проинтегрируем. В результате получим

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{s}\right)_{t'=t-r/c}, \quad (20.18)$$

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{cs}\right)_{t'=t-r/c}, \quad (20.19)$$

где $s = r(1 - n\beta)$.

Индекс $t' = t - r/c$ означает, что величины s и $\boldsymbol{\beta}$ следует взять в предыдущий момент времени t' . Запоздывающие потенциалы точечного заряда вида (20.18) называют потенциалами Лиенара — Вихерта [31, 32].

20.3. Поле ускоряемого электрона

Подставив потенциалы Лиенара—Вихерта в равенства (20.5), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\text{grad} \left(\frac{1}{s}\right)_{t'=t-r/c} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s}\right)_{t'=t-r/c}; \\ \frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \text{rot} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{c}\right)_{t'=t-r/c}. \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

Выразим теперь правые части этих уравнений через радиус-вектор $\xi(t')$ и скорость $\beta(t')$ точечного заряда, предполагаемых известными. Начнем с выражения $\partial/\partial t(\beta/s)$. Так как

$$\partial/\partial t = (\partial t' / \partial t)(\partial/\partial t')$$

и

$$t(t') = t' + (1/c)r[x, \xi(t')],$$

то с учетом соотношений (20.16) и (20.19)

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial r}{\partial t'} = 1 - n\beta = \frac{s}{r}; \quad (20.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}.$$

В частности,

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\beta}{s} \right) = \frac{r\dot{\beta}}{cs^2} - \frac{r\dot{\beta}s}{cs^3}, \quad (20.22)$$

где точкой обозначена производная по времени t' .

Вычисляя пространственные производные запаздывающей функции, необходимо учесть, что для движущегося электрона с заданной траекторией $\xi(t')$ в некоторый фиксированный момент времени t соответствующее время t' изменяется при переходе от одной точки наблюдения к другой, т. е. $t' = t'(x)$, и запаздывающая функция

$$f(x, t) = f[x, t'(x)],$$

а ее пространственные производные имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{t'} + \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)_x \left(\frac{dt'}{dx_i} \right)_t$$

и, значит,

$$\text{grad}_t = \text{grad}_{t'} + \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)_x \text{grad}_t t'(x). \quad (20.23)$$

В частности,

$$\text{grad}_t r = \text{grad}_{t'} r + \text{grad}_t t' \left(\frac{\partial r}{\partial t'} \right)_x, \quad (20.24)$$

а так как [см. соотношения (20.16)]

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t'} \right)_x = -n\beta c; \quad \text{grad}_{t'} r = n$$

и из равенства $t' = t - r/c$ следует, что $\text{grad}_t r = -c \text{grad}_t t'$, то, подставляя три последних соотношения в равенство (20.24), получаем

$$\text{grad}_t t' = \frac{-n}{c(1-n\beta)} = -\frac{r}{cs}. \quad (20.25)$$

Следовательно, формула (20.23) запишется в виде

$$\text{grad}_t = \text{grad}_{t'} - \frac{\mathbf{r}}{cs} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)_x;$$

в частности,

$$\text{grad}_t \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2} \text{grad}_t s = -\frac{1}{s^2} \text{grad}_{t'} s + \frac{\mathbf{r}\dot{s}}{cs^3}.$$

Далее, так как $\text{grad}_{t'} r = \mathbf{n}$ и $\text{grad}_{t'} (r\boldsymbol{\beta}) = -\dot{\boldsymbol{\beta}}$, то $\text{grad}_{t'} s = = \text{grad}_{t'} (r - r\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}$, и в результате получаем

$$\text{grad}_t \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}}{s^2} + \frac{\mathbf{r}\dot{s}}{cs^3}. \quad (20.26)$$

Подставляя уравнения (20.22) и (20.26) в уравнение (20.20), приходим к следующему соотношению для электрического поля ускоренного электрона:

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E} &= \frac{1}{s^2} (\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{r\dot{s}}{cs^3} (\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \frac{r}{cs^2} \dot{\boldsymbol{\beta}} = \\ &= \frac{r}{s^3} (\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) \left(\frac{s}{r} - \frac{\dot{s}}{c} \right) - \frac{r}{cs^2} \dot{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Поскольку $s = r - r\boldsymbol{\beta}$ [см. формулу (20.19)] и, согласно соотношениям (20.16), $\dot{r} = -\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}c$, то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{s}}{c} &= -\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - \frac{r}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}}; \\ \frac{s}{r} - \frac{\dot{s}}{c} &= (1 - \dot{\boldsymbol{\beta}}^2) + \frac{r\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (20.27)$$

и выражение для электрического поля запишется в виде

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{E} = \frac{r}{s^3} (\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) (1 - \dot{\boldsymbol{\beta}}^2) + \mathbf{K},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{r^2}{cs^3} [(\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) (\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}) - (1 - \mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}}] = \\ &= \frac{r^2}{cs^3} \{ \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \}. \end{aligned}$$

Последнее выражение легко получить, используя тождество

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (20.28)$$

В итоге для электрического поля получаем

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{e} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}}{r^2\gamma^2(1 - \mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}})^3} + \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]}{rc(1 - \mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}})^3} \right\}_{t'=t-r/c}. \quad (20.29a)$$

Перейдем теперь к магнитному полю. Равенство (20.20) можно переписать следующим образом:

$$\frac{4\pi e_0 c}{e} \mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s} \right)_{t'=t-r/c} = \left[\frac{1}{s} \text{rot}_t \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \times \text{grad}_t \frac{1}{s} \right]_{t'=t-r/c}. \quad (20.30)$$

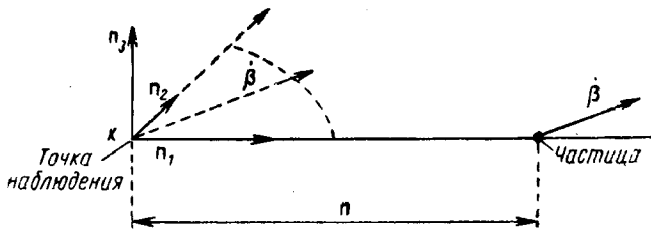


Рис. 38.

Вводя затем три единичных вектора \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 (рис. 38), направленных вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 , запишем

$$\begin{aligned} \text{rot}_t \boldsymbol{\beta} = & \left(\frac{\partial \beta_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{n}_1 - \left(\frac{\partial \beta_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{n}_2 + \\ & + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{n}_3, \end{aligned} \quad (20.31)$$

где

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \beta_i}{\partial t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial x_k} \right)_t = \dot{\beta}_i \left(\frac{\partial t'}{\partial x_k} \right)_t. \quad (20.32)$$

Единичные векторы на рис. 38 направлены так, что \mathbf{n}_1 антипараллелен \mathbf{r} (т. е. $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$), а \mathbf{n}_2 лежит в плоскости векторов $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ и \mathbf{r} . В этой системе координат [см. формулу (20.25)]

$$\dot{\beta}_3 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial x_1} \right)_t = \mathbf{n}_1 \text{grad}_t t' = -\frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{r}}{cs} = \frac{r}{cs};$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial x_2} \right)_t = -\frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{r}}{cs} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial x_3} \right)_t = -\frac{\mathbf{n}_3 \mathbf{r}}{cs} = 0.$$

Следовательно, единственный отличный от нуля член в правой части формулы (20.31) запишется в виде

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} \mathbf{n}_3 = \dot{\beta}_2 \frac{\partial t'}{\partial x_1} \mathbf{n}_3 = \frac{\dot{\beta}_2 r}{cs} = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{cs},$$

т. е.

$$\text{rot}_t \boldsymbol{\beta} = -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{cs}. \quad (20.33)$$

Перепишем второй член формулы (20.30), учитывая равенства (20.26) и (20.27):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} \times \text{grad}_t \left(\frac{1}{s} \right) &= \boldsymbol{\beta} \times \left(\frac{\mathbf{r}\dot{s}}{cs^3} - \frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{s^2} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}}{s^3} \left(\frac{s}{r} - \frac{\dot{s}}{c} \right) = \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}}{s^3} \left[(1-\beta^2) + \frac{\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} \right]. \end{aligned} \quad (20.34)$$

Подставляя уравнения (20.33) и (20.34) в равенство (20.30), для магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{e} c\mathbf{B} &= \frac{1}{s} \text{rot } \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \times \text{grad} \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 s^3} - \frac{\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{cs^2} - \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}}{s^3} \cdot \frac{\mathbf{r}\dot{\boldsymbol{\beta}}}{c} = \\ &= -\frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 s^3} + \frac{r^2 \mathbf{n}}{cs^3} \times [\dot{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{n}\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} + \{\mathbf{n} (\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\beta}})\}]. \end{aligned}$$

Добавленный здесь член, заключенный в фигурные скобки, равен нулю, и, кроме того, нетрудно убедиться, используя тождество (20.28), что выражение в квадратных скобках равно $\mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]$. В результате получим

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c}{e} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \frac{-\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}}{r^2 \gamma^2 (1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\{\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times [(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\}}{rc (1-\mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{t'=t-r/c}. \quad (20.29б)$$

20.4. Излучаемая мощность

Общий случай. Каждое из выражений (20.29а) и (20.29б) для электрического и магнитного полей ускоряемого электрона состоит из двух частей. Одна из них зависит только от скорости и пропорциональна $1/r^2$, а другая зависит от ускорения и пропорциональна $1/r$. Излучаемую электроном энергию можно получить, интегрируя вектор Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (20.35)$$

по некоторой замкнутой поверхности, окружающей электрон.

Для члена, зависящего от скорости, модуль вектора Пойнтинга пропорционален $1/r^4$, а для члена, зависящего от ускорения, он пропорционален $1/r^2$. В первом случае при $r \rightarrow \infty$ полный поток энергии через поверхность, окружающую электрон, равен нулю, а во втором случае стремится к некоторой конечной величине, которая и представляет собой энергию излучения.

Согласно формуле (20.29а) для нерелятивистского электрона ($\boldsymbol{\beta} \rightarrow 0$) часть поля, зависящая от ускорения, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{rc}; \\ \mathbf{B}_a(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a); \\ \mathbf{H}_a &= \epsilon_0 c^2 \mathbf{B}_a \end{aligned} \quad (20.36)$$

и вектор Пойнтинга

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_a &= \mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a = \varepsilon_0 c E_a^2 \mathbf{n} = \\ &= \frac{e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c} \cdot \frac{\dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha}{r^2} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (20.37)$$

где α — угол между векторами $\dot{\beta}$ и \mathbf{n} . Мощность, излучаемая в телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$,

$$dP_\gamma = |\mathbf{S}_a| r^2 d\Omega = \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \sin^3 \alpha d\alpha}{8\pi \varepsilon_0 c},$$

а полная мощность излучения нерелятивистского электрона [30]

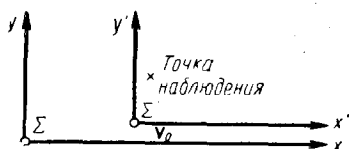


Рис. 39.

$$P_\gamma^* = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^{*2}}{6\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{E_0 r_0}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^{*2}, \quad (20.38)$$

где

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_0 c^2}.$$

Этот результат был получен Лар-мором в 1897 г. [30]. Звездочка

при P_γ указывает, что полученные соотношения справедливы для нерелятивистского электрона, в частности, они сохраняются, если система отсчета движется вместе с электроном.

Аналогичным образом, интегрируя уравнения поля, можно вычислить мощность излучения и в случае произвольной скорости (подобные вычисления были проделаны Лиенаром в 1898 г. [31]). Однако проще получить результат, применяя преобразование Лоренца к уравнению (20.38).

Пусть в исходной, лабораторной системе координат Σ электрон имеет скорость $\mathbf{v}_0 = \beta_0 c$. В системе координат Σ^* , движущейся вместе с электроном, мощность, излучаемая последним ($P_\gamma^* = - (dE^*/dt^*)_\gamma$), задается равенством (20.38). Энергия электрона при переходе от одной системы отсчета к другой изменяется так, что

$$E = \frac{E^*}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \text{ и так как } dt = \frac{dt^*}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \text{ то}$$

$$P_\gamma = - \frac{dE_\gamma}{dt} = P_\gamma^*, \quad (20.39)$$

т. е. мощность излучения не изменяется при переходе от лабораторной системы координат к системе, движущейся вместе с электроном. При таком преобразовании координат, как будет показано ниже, ускорение

$$(\dot{\mathbf{v}}^*)^2 = \gamma^6 \dot{v}_\parallel^2 + \gamma^4 \dot{v}_\perp^2, \quad (20.40)$$

откуда, используя равенства (20.38) и (20.39), нетрудно получить результат Лиенара для мощности, излучаемой электроном при произвольной скорости:

$$P_{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{r_0 E_0}{c^3} (\gamma^6 \dot{v}_{\parallel}^2 + \gamma^4 \dot{v}_{\perp}^2). \quad (20.41a)$$

Вернемся к формуле (20.40). Ее можно получить, дважды продифференцировав преобразование Лоренца для координат. Если x, y — координаты электрона в лабораторной системе Σ , а x', y' — его координаты в сопутствующей системе Σ' , которая движется параллельно оси x со скоростью $v_0 = \beta_0 c$ (рис. 39), измеренной относительно Σ , то

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}; \\ y' &= y; \\ t' &= \frac{t - v_0 x/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \end{aligned}$$

(Не следует путать записанный здесь символ t' с таким же обозначением времени запаздывания в других местах текста.)

Однократное дифференцирование этих равенств дает преобразование Лоренца для скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt'} &= \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - (dx/dt) v_0/c^2}; \\ \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx'(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{dx/dt - v_0}{1 - (dx/dt) v_0/c^2}; \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{dy'(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{(1 - \beta_0^2)^{1/2}}{1 - (dx/dt) v_0/c^2} \cdot \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

При вторичном дифференцировании получим преобразование Лоренца для ускорений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt'^2} &= \frac{(1 - \beta_0^2)^{3/2}}{[1 - (dx/dt) v_0/c^2]^3} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ \frac{d^2 y'}{dt'^2} &= \frac{1 - \beta_0^2}{[1 - (dx/dt) v_0/c^2]^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{(dy/dt) v_0/c^2}{1 - (dx/dt) v_0/c^2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right). \end{aligned}$$

Для частицы, покоящейся в данный момент времени, в системе Σ' $dx/dt = v_0$, $dy/dt = 0$, откуда

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \gamma^3 \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad \frac{d^2 y'}{dt'^2} = \gamma^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$$

и в результате приходим к равенству (20.40):

$$(\dot{\mathbf{v}}')^2 = \left(\frac{d^2x}{dt'^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt'^2}\right)^2 = \gamma^6 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \gamma^4 \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2.$$

Частные случаи. Более удобны иногда другие формы записи полученного результата (20.41). Дифференцируя $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, найдем $\dot{v}_{\parallel} = c\dot{\beta} = c\beta^{-1}\gamma^{-3}\dot{\gamma}$. Кроме того, если ввести радиус кривизны траектории, то можно написать, что $v_{\perp} = (\beta c)^2/\rho$. После этого получим

$$P_{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{E_0 r_0}{c} \left(\beta^{-2} \dot{\gamma}^2 + \frac{\beta^4 c^2 \gamma^4}{\rho^2} \right). \quad (20.41б)$$

Если же заменить скорости импульсами по формулам $\dot{p}_{\parallel} = (\beta c)^{-1} \dot{E}$, $\dot{p}_{\perp} = m_0 \gamma \dot{v}_{\perp}$, то

$$P_{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{r_0 c}{E_0} (\dot{p}_{\parallel}^2 + \gamma^2 \dot{p}_{\perp}^2).$$

Преобразуем в этой формуле выражение, заключенное в скобки:

$$\begin{aligned} p_{\parallel}^2 + \gamma^2 p_{\perp}^2 &= \gamma^2 (\dot{p}_{\parallel}^2 - \beta^2 \dot{p}_{\parallel}^2 + \dot{p}_{\perp}^2) = \\ &= \gamma^2 \left[\dot{p}^2 - \frac{1}{c^2} \dot{E}^2 \right] = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2. \end{aligned}$$

В результате получаем квадрат четырехмерного векторного инварианта теории относительности (τ здесь обозначает время в системе координат, движущейся вместе с электроном). Следовательно, выражение P_{γ} , инвариантное относительно преобразования Лоренца, имеет вид

$$P_{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{r_0 c}{E_0} \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right]. \quad (20.41в)$$

Рассмотрим случай движения, при котором векторы скорости и ускорения параллельны. Из формулы (20.41б) следует, что в случае ускорения, параллельного скорости, мощность излучения в γ^2 раз меньше, чем в случае ускорения, перпендикулярного скорости. Если ускорение параллельно скорости, то радиус кривизны траектории $\rho = \infty$, и равенство (20.41а) принимает вид

$$\frac{(P_{\gamma})}{|\dot{E}|} = - \frac{(\dot{E}_{\gamma})_{\parallel}}{|\dot{E}|} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_0}{E_0 \beta} \left| \frac{dE}{ds} \right|, \quad (20.42)$$

т. е. потери на излучение составляют малую часть от изменения энергии \dot{E} , если $|dE/ds| \geq E_0/r_0$, где r_0 — классический радиус электрона, E_0 — энергия покоя электрона.

Другим распространенным случаем является движение по окружности. Для частицы, движущейся по окружности радиусом

ρ с постоянной скоростью v_0 , $\gamma = 0$ и равенство (20.41а) запишется в виде

$$(P_\gamma)_\perp = \frac{2}{3} r_0 E_0 c \frac{\beta^4 \gamma^4}{\rho^2}. \quad (20.43)$$

В частности, для частицы, движущейся в магнитном поле ($B\rho = p/e = m_0 c\beta\gamma/e$), излучаемая мощность

$$(P_\gamma)_\perp = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_0 c^3}{E_0} \beta^2 \gamma^2 B^2. \quad (20.44)$$

Энергия, излучаемая электроном за один оборот, $\Delta E_\gamma = \oint (P_\gamma)/\beta c ds$. Рассмотрим орбиту, на которой магнитное поле постоянно и равно B_0 . В этом случае

$$|\Delta E_\gamma| = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r_0 E_0 \beta^3 \gamma^4}{\rho_0} = \frac{4\pi}{3} e r_0 c \beta^2 \gamma^3 B_0, \quad (20.45)$$

или численно для электрона *

$$|\Delta E_\gamma|_{\text{кэв}} = 88,5 E_{\text{Гэв}}^4 / \rho_m = 26,6 E_{\text{Гэв}}^3 B_T. \quad (20.46)$$

Глава 21

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗЛУЧАЕМОЙ МОЩНОСТИ

Найдем мощность, излучаемую частицей в малый телесный угол $d\Omega$, осью которого является вектор \mathbf{n} . Как было показано [(см. формулу (20.21)], связь между моментом наблюдения t и моментом излучения t' следующая:

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - n\beta.$$

Поток энергии в точке наблюдения за отрезок времени Δt излучается частицей в некоторый более ранний отрезок времени $\Delta t'$. Отрезок времени Δt короче, чем $\Delta t'$, если имеется составляющая скорости, направленная в точку наблюдения.

Мощность, излучаемая частицей, с учетом формулы (20.29а)

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE_\gamma}{d\Omega dt'} \right)_{\text{изл}} &= \left(\frac{dE_\gamma}{d\Omega dt} \right)_{\text{набл}} \frac{dt}{dt'} = r^2 (\mathbf{S}, \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = \\ &= r^2 \varepsilon_0 c^2 E^2 (1 - n\beta) = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c} \times \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}]]^2}{(1 - n\beta)^5}. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Вектор \mathbf{n} , характеризующий направление излучения, определяется полярным углом φ (рис. 40), отсчитываемым от направления мгно-

* Индукция B здесь выражена в теслах ($1 \text{ тл} = 10^4 \text{ гс}$).

венной скорости электрона, и азимутальным углом ψ , лежащим в плоскости, перпендикулярной вектору β . Угол отсчитывается от оси, параллельной вектору β .

Можно написать, что

$$\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] = (\mathbf{n} - \beta) (\mathbf{n} \dot{\beta}) - \dot{\beta} [\mathbf{n}(\mathbf{n} - \beta)].$$

Умножим далее последнее выражение скалярно само на себя. Ограничимся здесь рассмотрением движения по окружности.

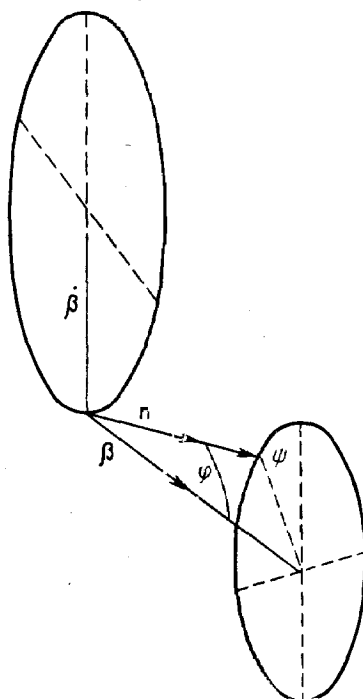


Рис. 40.

В этом случае $(\beta \dot{\beta}) = 0$, $(\mathbf{n} \dot{\beta}) = \dot{\beta} \cos \varphi$, $(\mathbf{n} \dot{\beta}) = \dot{\beta} \sin \varphi \cos \psi$ и, следовательно,

$$\frac{dE_{\gamma}}{d\Omega dt'} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta \cos \varphi)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \varphi)^2} \right]. \quad (21.2)$$

Из этой формулы следует, что в ультрарелятивистской области ($\beta \rightarrow 1$) почти все излучение направлено вперед ($\varphi \ll 1$). Для этой области можно написать

$$1 - \beta \cos \varphi \approx 1 - \beta + 1/2 \beta \varphi^2 \approx \frac{1}{2\gamma^2} (1 + \gamma^2 \varphi^2), \quad d\Omega = \frac{1}{2} d(\varphi^2) d\psi,$$

откуда

$$\frac{dE_{\gamma}}{d\Omega dt'} d\Omega \approx \frac{e^2 \dot{\beta}^2 \gamma^6}{4\pi^2 \varepsilon_0 c} \cdot \frac{1}{(1 + \gamma^2 \varphi^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \varphi^2 \cos^2 \psi}{(1 + \gamma^2 \varphi^2)^2} \right] d(\varphi^2) d\psi. \quad (21.3)$$

В приближении, основанном на этом соотношении, для средне-квадратичного значения полярного угла $\sqrt{\overline{\varphi^2}}$, в который излучается энергия, получим

$$\gamma^2 \overline{\varphi^2} \approx \frac{\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(1+x)^3} - 4 \cos^2 \psi \frac{x}{(1+x)^5} \right] x dx}{\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(1+x)^3} - 4 \cos^2 \psi \frac{x}{(1+x)^5} \right] dx} = 1,$$

т. е. средний квадрат угла φ не зависит от ψ и равен

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (21.4)$$

Для необходимых в последующем изложении проекций угла φ на радиальное x и аксиальное z направления вращения частицы имеем

$$\overline{\varphi_x^2} = \overline{\varphi_z^2} = \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (21.5)$$

Очевидно, что, проинтегрировав равенство (21.2), получим полную мощность излучения для случая движения по окружности, т. е. второй член правой части равенства (20.41).

Глава 22

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЧАСТОТЫ ИСПУСКАНИЯ КВАНТА НА СРЕДНИЙ КВАДРАТ ЕГО ЭНЕРГИИ

22.1. Спектральное распределение излучения

Электромагнитное поле релятивистского электрона, движущегося с ускорением, сосредоточено в конусе, осью которого является вектор скорости. При движении электрона по окружности излучение электрона можно сравнить с движением конуса света вращающегося маяка, который дает короткую вспышку в той точке, где находится наблюдатель (рис. 43). Спектр излучения в точке наблюдения x легко получить, применяя преобразование Фурье к вектору наблюдаемого электрического (или магнитного) поля.

Напряженность электрического поля в точке x

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (22.1)$$

откуда спектральная плотность в этой точке

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (22.2)$$

Представляет интерес вычисление спектральной плотности энергии и мощности излучения. Поток мощности в точке x (через единицу поверхности) связан с вектором Пойнтинга соотношением $|\mathbf{s}| = \varepsilon_0 c \mathbf{E}^2$ [см. формулу (20.37)].

Полное значение потока энергии, которое будет зарегистрировано в точке x (в элементе $d\Omega$ телесного угла) после однократного прохождения конуса излучения через эту точку,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 |\mathbf{S}| dt = r^2 \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^2 dt = \\ &= r^2 \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} dt \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= r^2 \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

(расстояние r от электрона до точки наблюдения практически постоянно в течение «засвечивания» окрестности этой точки).

Подставляя $\mathbf{A}(\omega)$ из формулы (22.2), находим

$$\frac{dW}{d\Omega} = 2\pi r^2 \varepsilon_0 c \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) \mathbf{A}(-\omega) d\omega = 4\pi r^2 \varepsilon_0 c \int_0^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega.$$

Так как $\mathbf{A}(-\omega) = \mathbf{A}^*(\omega)$ (поскольку поле \mathbf{E} в равенстве (22.1) является действительной величиной), то

$$\frac{dW(x, \omega)}{d\omega d\Omega} = 4\pi r^2 \varepsilon_0 c |\mathbf{A}(\omega)|^2 = \frac{r^2 \varepsilon_0 c}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (22.3)$$

Подставляя вместо \mathbf{E} второй (радиационный) член выражения (20.29а), получаем окончательный вид плотности потока энергии в единице телесного угла, исходящего из точки x :

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{r_0 E_0}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{n}x [(n-\beta) \times \dot{\beta}]}{(1-n\beta)^3} \right\}_{t'=t-r/c} e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (22.4)$$

Вычислим теперь интеграл (22.4). Введем в качестве переменной интегрирования время $t' = t - r(t')/c$. Тогда [см. формулу (20.21)] $dt = [1 - n\beta]dt'$ и интеграл преобразуется к виду

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n \times (n - \beta) \times \dot{\beta}}{(1 - n\beta)^2} e^{i\omega [t' + r(t')/c]} dt'. \quad (22.5)$$

Подынтегральное выражение существенно отлично от нуля лишь для малых $\Delta t'$, т. е. для малых пробегов электрона Δr .

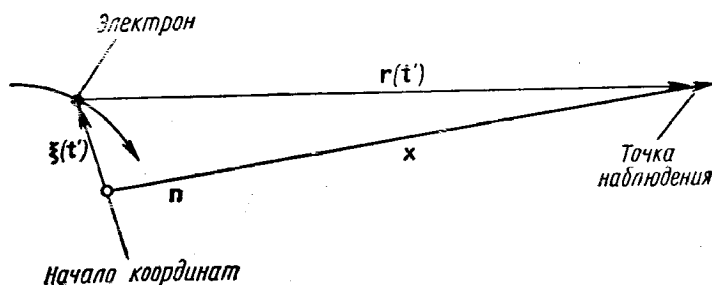


Рис. 41.

Точка наблюдения x расположена достаточно далеко, и вектор n в течение времени Δt , или, что то же самое, на отрезке Δr , практически не изменяется (рис. 41):

$$n = \text{const}. \quad (22.6)$$

Кроме того, начало координат сопутствующей системы отсчета находится в окрестности отрезка Δr , и если $\xi(t')$ обозначает вектор из начала координат в точку нахождения электрона, то приближенно можно написать

$$r(t') = x - n\xi(t'); \\ e^{i\omega [t' + r(t')/c]} = e^{i\omega x/c} e^{i\omega [t' - n\xi(t')/c]}. \quad (22.7)$$

В предположении (22.6) двойное векторное произведение (22.5) представляет собой полную производную по времени

$$\frac{n \times (n - \beta) \times \dot{\beta}}{(1 - n\beta)^2} = \frac{d}{dt'} \cdot \frac{n \times (n \times \beta)}{(1 - n\beta)}. \quad (22.8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \cdot \frac{n \times (n \times \beta)}{1 - n\beta} &= \frac{d}{dt'} \cdot \frac{n(n\dot{\beta}) - \dot{\beta}}{1 - n\beta} = \\ &= \frac{(1 - n\beta) d/dt' [n(n\dot{\beta}) - \dot{\beta}] - d/dt' (1 - n\beta) [n(n\dot{\beta}) - \dot{\beta}]}{(1 - n\beta)^2} = \\ &= \frac{(n\dot{\beta})(n - \beta) - (1 - n\beta)\dot{\beta}}{(1 - n\beta)^2}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (22.4), (22.7) и (22.8), имеем

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{r_0 E_0}{4\pi^2 c} |\mathbf{K}|^2,$$

где

$$\mathbf{K} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} \right] e^{i\omega [t' + \mathbf{n}\xi(t')/c]} dt'. \quad (22.9)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\mathbf{K} = \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} e^{i\omega [t' - \mathbf{n}\xi(t')/c]} \right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \times e^{+i\omega [t' - \mathbf{n}\xi(t')/c]} dt'. \quad (22.10)$$

Первый член здесь имеет абсолютную величину порядка единицы, а второй — порядка $\omega \Delta t'$, причем промежуток $\Delta t'$ соответствует изменению показателя экспоненты вблизи π . Нетрудно убедиться, что $\omega [t' - \mathbf{n}\xi(t')/c] \approx (\omega/2)(1/\gamma^2)t'$ или $\omega \Delta t' \approx 2\pi\gamma^2 \gg 1$ и, следовательно, первым членом в равенстве (22.10) можно пренебречь. В результате получаем

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{r_0 E_0 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} e^{+i\omega [t' - \mathbf{n}\xi(t')/c]} dt' \right|^2. \quad (22.11)$$

Для интегрирования уравнения (22.11) обозначим $1/\rho$ мгновенную кривизну траектории электрона и введем прямоугольную систему

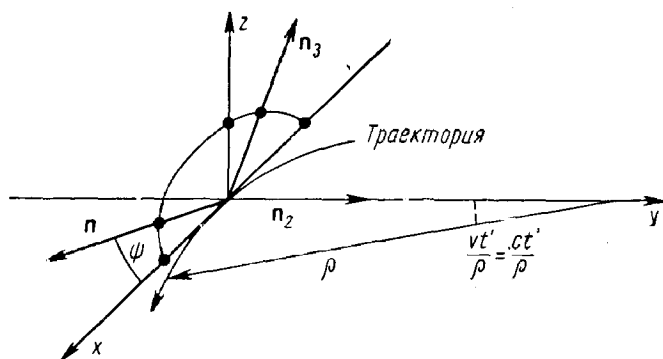


Рис. 42.

координат с осями x, y, z (рис. 42). Без ограничения общности можно положить также, что траектория лежит в плоскости x, y и проходит через начало координат, а единичный вектор \mathbf{n} , направленный в точку наблюдения, лежит в плоскости x, z , образуя угол ψ с осью x .

Пусть, кроме того, $t' = 0$ в момент прохождения электрона через начало координат x, y, z . Введем еще вектор \mathbf{n}_2 , параллельный $\dot{\beta}$ в момент $t' = 0$, и вектор $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_2$. Тогда, так как $\beta \approx 1$,

$$\beta = \beta [\mathbf{n} \cos(ct'/\rho) \cos \psi + \mathbf{n}_2 \sin(ct'/\rho) - \mathbf{n}_3 \cos(ct'/\rho) \sin \psi]; \quad (22.12)$$

$$\mathbf{n} \times \beta = \beta \begin{vmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos \frac{ct'}{\rho} \cos \psi & \sin \frac{ct'}{\rho} & -\cos \frac{ct'}{\rho} \sin \psi \end{vmatrix} \approx \approx \mathbf{n}_2 \psi + \mathbf{n}_3 \left(\frac{c}{\rho} t' \right).$$

Проекция радиус-вектора ξ , направленного в точку нахождения электрона, на вектор \mathbf{n} равна

$$\mathbf{n} \xi = \rho \sin \frac{vt'}{\rho} \cos \psi. \quad (22.13)$$

Разложим теперь в ряд до третьего порядка относительно малых величин t' , ψ и $1/\gamma$ показатель экспоненты в равенстве (22.11):

$$i\omega (t' - \mathbf{n} \xi / c) \approx i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t' + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2} \right]. \quad (22.14)$$

После этого формула (22.1) запишется в виде

$$\frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{r_0 E_0 \omega^2}{4\pi^2 c} (A_1^2 + A_2^2),$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t' \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t' + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2} \right] \right\} dt'; \\ A_2 &= \psi \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) t' + \frac{c^2 t'^3}{3\rho^2} \right] \right\} dt'. \end{aligned} \right\} \quad (22.15)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{ct'}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)^{-1/2}; \\ \xi &= \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (22.16)$$

то интегралы (22.15) примут вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx; \\ A_2 &= \frac{\rho}{c} \psi \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx. \end{aligned} \right\} (22.17)$$

Интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi); \\ \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi) \end{aligned} \right\} (22.18)$$

называются функциями Эйри, или модифицированными функциями Бесселя [37].

В результате получаем следующую формулу для спектральной плотности излучения, приходящейся на единицу телесного угла в точке x (ψ) наблюдения при однократном прохождении электрона:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\psi, \omega)}{d\omega d\Omega} &= \frac{r_0 E_0}{3\pi^2 c} \left(\frac{\omega \rho}{c} \right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)^2 \times \\ &\times \left(K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\xi \psi^2}{(1/\gamma^2) + \psi^2} K_{1/3}^2(\xi) \right). \end{aligned} \quad (22.19)$$

22.2. Величина $\overline{N\varepsilon^2}$

Важным параметром, характеризующим движение электрона в ускорителе, является величина $\overline{N\varepsilon^2}$. Она представляет собой произведение частоты испускания квантов на средний квадрат их энергии. По определению

$$\overline{N\varepsilon^2} = \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon = \int \varepsilon \frac{dP_{\gamma}}{d\varepsilon} d\varepsilon, \quad (22.20)$$

где $dP_{\gamma}/d\varepsilon = \varepsilon dN/d\varepsilon$ — мощность, излучаемая электроном в спектральном интервале $d\varepsilon$.

Между энергией кванта и частотой излучения существует известное соотношение Эйнштейна

$$\varepsilon = h\nu = \hbar\omega.$$

Так как

$$\frac{dP_{\gamma}}{d\varepsilon} d\varepsilon = \frac{dP_{\gamma}}{d\omega} d\omega,$$

то равенство (22.20) переписывается следующим образом:

$$\dot{N}\bar{\varepsilon}^2 = \hbar \int_0^{\infty} \omega \frac{dP_{\gamma}}{d\omega} d\omega. \quad (22.21)$$

Энергия, излучаемая электроном за один оборот в интервале $d\omega$ и проходящая через замкнутую поверхность (рис. 43), окружающую траекторию электрона, равна

$$\left(\frac{dW}{d\omega}\right)_{об} = \int_{\Omega} \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dW}{d\omega d\Omega} \cos \psi d\psi d\theta.$$

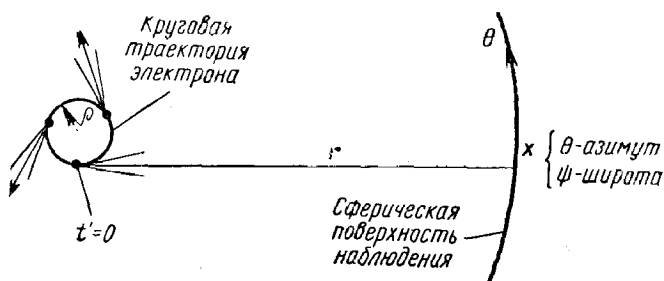


Рис. 43.

Введем на время допущение, что электрон движется по окружности. В силу симметрии относительно угла θ интегрирование по этой переменной дает множитель 2π . Кроме того, $dW/d\omega d\Omega$ существенно отлично от нуля лишь для $|\psi| \ll 1$ и, значит,

$$\left(\frac{dW}{d\omega}\right)_{об} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(\psi, \omega)}{d\omega d\Omega} d\psi.$$

Мощность излучения получим, разделив энергию, излучаемую за один оборот, на период обращения электрона $\Delta t' = 2\pi\rho/c$:

$$\frac{dP_{\gamma}}{d\omega} = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(\psi, \omega)}{d\omega d\Omega} d\psi.$$

Напишем далее

$$\begin{aligned} \dot{N}\bar{\varepsilon}^2 &= \hbar \int_0^{\infty} \omega \frac{dP_{\gamma}}{d\omega} d\omega = \frac{\hbar c}{\rho} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(\psi, \omega)}{d\omega d\Omega} d\psi = \\ &= \frac{\hbar c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \omega \frac{dW(\psi, \omega)}{d\omega d\Omega} d\omega. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Вычислим $\int_0^{\infty} \omega \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\omega$, вернувшись к формуле (22.19):

$$\int_0^{\infty} \omega \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\omega = \frac{r_0 E_0}{3\pi^2 c^3} \rho^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2 \right)^2 \left\{ \int_0^{\infty} \omega^3 K_{2/3}^2(\xi) d\omega + \frac{\psi^2}{1/\gamma^2 + \psi^2} \int_0^{\infty} \omega^3 K_{2/3}^2(\xi) d\omega \right\}.$$

Заменяя ω величиной ξ из соотношения (22.16), имеем

$$\int_0^{\infty} \omega \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\omega = \frac{27r_0 E_0 c}{\pi^2 \rho^2} \frac{1}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^4} \left\{ \int_0^{\infty} \xi^3 K_{2/3}^2(\xi) d\xi + \frac{\psi^2}{1/\gamma^2 + \psi^2} \int_0^{\infty} \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi \right\},$$

и так как (см. разд. 22.3)

$$\int_0^{\infty} \xi^3 K_{2/3}^2(\xi) d\xi = \frac{20\pi}{3^4 \sqrt{3}}; \quad \int_0^{\infty} \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi = \frac{16\pi}{3^4 \sqrt{3}},$$

то

$$\int_0^{\infty} \omega \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\omega = \frac{20r_0 E_0 c}{3 \sqrt{3} \pi \rho^2} \frac{1 + \frac{4}{5} \frac{\psi^2}{1/\gamma^2 + \psi^2}}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^4} \quad (22.23)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{N}_{E^2} &= \frac{\hbar c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \left(\int_0^{\infty} \omega \frac{dW}{d\omega d\Omega} d\omega \right) = \frac{20r_0 E_0 c^2 \hbar}{3 \sqrt{3} \pi \rho^3} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^4} + \frac{4}{5} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2 d\psi}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^5} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку (см. таблицы Двайта [36])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^4} = \frac{5\pi\gamma^7}{16}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2 d\psi}{(1/\gamma^2 + \psi^2)^5} = \frac{5\pi\gamma^7}{8 \cdot 16},$$

то в результате приходим к следующему соотношению:

$$\overline{N\varepsilon^2} = \frac{55}{2^3 3^{3/2}} \frac{r_0 E_0 c^2 \hbar}{\rho^3} \gamma^7. \quad (22.24)$$

Определим «критическую энергию кванта» с помощью соотношения

$$\varepsilon_c = \frac{3}{2} \hbar \frac{c}{\rho} \gamma^3, \quad (22.25)$$

тогда с учетом равенства (20.43) можно написать

$$\overline{N\varepsilon^2} = \frac{55}{2^3 3^{3/2}} P_\gamma \varepsilon_c. \quad (22.26)$$

Аналогичные результаты были получены Сэндсом [33] и Швингером [34].

22.3. Дополнение

Для вычисления интегралов типа $T_{n, \mu} = \int_0^\infty x^n K_\mu^2(x) dx$ воспользуемся интегралами Никольсона (Ватсон [37]):

$$K_\mu(z) K_\nu(z) = 2 \int_0^\infty K_{\mu+\nu}(2z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\mu - \nu) t dt \quad (22.27)$$

или

$$K_\mu(z) K_\nu(z) = 2 \int_0^\infty K_{\mu-\nu}(2z \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\mu + \nu) t dt, \quad (22.28)$$

где μ и ν — любые числа.

Из формулы (22.27) следует, что

$$K_\mu^2(z) = 2 \int_0^\infty K_{2\mu}(2z \operatorname{ch} t) dt, \quad (22.29)$$

откуда

$$\begin{aligned} T_{n, \mu} &= \int_0^\infty x^n K_\mu^2(x) dx = 2 \int_0^\infty dt \left[\int_0^\infty x^n K_{2\mu}(2x \operatorname{ch} t) dx \right] = \\ &= 2 \int_0^\infty V_{n, \mu}(t) dt, \end{aligned}$$

где $V_{n, \mu} = \int_0^\infty x^n K_{2\mu}(2x \operatorname{ch} t) dx$, или, если положить $2x \operatorname{ch} t = y$, то

$$V_{n, \mu} = \frac{1}{(2 \operatorname{ch} t)^{n+1}} \int_0^{\infty} y^n K_{2\mu}(y) dy.$$

Известно [37], что

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda} K_{\tau}(t) dt = 2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\lambda+\tau+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda-\tau+1}{2}\right),$$

т. е. $V_{n, \mu} = \frac{1}{4} \frac{1}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1+2\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1-2\mu}{2}\right)$ и

$$T_{n, \mu} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1+2\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1-2\mu}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}. \quad (22.30)$$

Если обозначить $L_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\operatorname{ch} t)^n}$, то для $n > 1$ [36]

$$L_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^n x} = \left[\frac{\operatorname{sh} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} \right]_0^{\infty} + \frac{n-2}{n-1} L_{n-2}.$$

При $n=1$ [36]

$$L_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{2}, \quad L_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$$

и, следовательно, $L_3 = \frac{1}{2} L_1 = \frac{\pi}{4}$, $L_4 = \frac{2}{3} L_2 = \frac{2}{3}$ и т. д.

Так как

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

то

$$T_{3, \mu} = \frac{\pi}{3} \mu \frac{1-\mu^2}{\sin \pi \mu} \quad (22.31)$$

и, значит,

$$\left. \begin{aligned} T_{3, (2/3)} &= \int_0^{\infty} \xi^3 K_{2/3}^2(\xi) d\xi = \frac{20\pi}{3^4 \sqrt{3}}; \\ T_{3, (1/3)} &= \int_0^{\infty} \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi = \frac{16\pi}{3^4 \sqrt{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (22.32)$$

Глава 23

РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ И РАЗМЕРЫ ПУЧКА В ПРИБЛИЖЕНИИ СГЛАЖЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

23.1. Излучение и затухание в классическом приближении

Постановка задачи. Исследуем изменение амплитуды колебания частицы под действием излучения, испускаемого самой частицей. Рассмотрим частицы, движущиеся по синхронной орбите в ускорителе с постоянным магнитным полем, характеризуемым постоянным или знакопеременным градиентом и содержащим, возможно, прямолинейные участки. Предполагаем, что длина волны бетатронных колебаний велика по сравнению с размерами периода магнитной структуры ускорителя. В этом случае замкнутые орбиты можно приближенно представить состоящими из дуг окружностей и прямолинейных участков, на которые наложены бетатронные синусоидальные колебания, вызванные эффективными фокусирующими силами, равными в среднем тем силам, которые действуют на частицу.

Магнитное поле и радиус траектории удовлетворяют в любой точке соотношению $B\rho = p/c$. Отсюда следует, что для траекторий двух частиц, импульсы которых различаются на dp , при любом значении азимута справедливо соотношение

$$\frac{p}{B} \cdot \frac{dB}{dp} + \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} = 1.$$

Соответствующее радиальное смещение замкнутой орбиты $dx_f = g(s) R \frac{dp}{p}$ (см. формулу (15.13)) и

$$\frac{dB}{dx_f} = \frac{B}{gR} \left(1 - \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} \right). \quad (23.1)$$

Для сглаженного движения предполагается, что

$$\left. \begin{aligned} g(s) = \text{const} = \alpha = \frac{p}{R} \cdot \frac{dR}{dp}, \\ \text{а для замкнутой орбиты в магнитях} \\ \rho = \text{const}; \quad d\rho = dx_f; \\ \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp} = \text{const} = \alpha' = \alpha \frac{R_s}{\rho_s}. \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

Обозначим индексом M усреднение вдоль орбиты внутри отдельного магнитного сектора. Тогда из формул (23.1) и (23.2) следует, что

$$\frac{dB_M}{dx_f} = \frac{B_M}{R_s} \left[\frac{1 - \alpha (R_s/\rho_s)}{\alpha} \right]. \quad (23.3)$$

При излучении на электроны действует сила реакции f_{γ} , направленная противоположно вектору скорости. В классическом приближении, когда пренебрегают квантовыми флуктуациями,

$$\mathbf{f}_{\gamma} = P_{\gamma} \frac{\mathbf{c}}{c^2}.$$

Согласно формуле (20.44)

$$\left. \begin{aligned} P_{\gamma} &= P_{\gamma s} \frac{B^2 E^2}{B_s^2 E_s^2}; \quad (P_{\gamma s})_M = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_0 c^3}{E_0^3} (B_s)_M^2 E_s^2; \\ \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial x} \right)_{M, s} &= \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial B} \cdot \frac{dB}{dx} \right)_{M, s} = (P_{\gamma s})_M \frac{2}{\alpha R_s} \left(1 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right); \\ \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial E} \right)_{M, s} &= (P_{\gamma s})_M \frac{2}{E_s}. \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

Пусть энергия частицы $E = E_s + \Delta E$. Для радиального положения частицы ($x + x_f$), где x — отклонение частицы в результате бетатронных колебаний, мощность, излучаемая частицей внутри магнита,

$$\begin{aligned} (P_{\gamma})_M &= (P_{\gamma s})_M + \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial x} \right)_{M, s} (x + x_f) + \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial E} \right)_{M, s} \Delta E + \dots = \\ &= (P_{\gamma s})_M \left[1 + \frac{2}{\alpha R_s} \left(1 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) x + \left(4 - 2\alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{\Delta E}{E_s} \right], \end{aligned}$$

причем здесь учтено, что $x_f = \alpha R_s (\Delta E / E_s)$.

В сглаженном приближении излучение не зависит от азимута и излучаемая мощность

$$P_{\gamma} = (P_{\gamma})_M \frac{\rho_s}{R_s}; \quad P_{\gamma s} = (P_{\gamma s})_M \frac{\rho_s}{R_s}. \quad (23.5)$$

В этом случае вместо предыдущего разложения имеем

$$P_{\gamma} = (P_{\gamma s})_M \left[1 + \frac{2}{\alpha R_s} \left(1 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) x + \left(4 - 2\alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{\Delta E}{E_s} \right]. \quad (23.6)$$

Вертикальные бетатронные колебания (по z). Продольная компонента силы f_z , действующей на электрон, в гладком приближении состоит из трех слагаемых:

1) силы реакции излучения

$$(f_z)_z = -(P_{\gamma}/c) z' \approx -(P_{\gamma s}/c) z' = -(P_{\gamma s}/c^2) \dot{z}; \quad (23.7)$$

2) ускоряющей силы $f_{\text{уск } z} = 0$;

3) силы Лоренца — силы взаимодействия с магнитным полем

$$f_{0z} = -m\omega_z^2 z.$$

По второму закону Ньютона

$$f_z = -\frac{P_{\gamma s}}{c^2} \dot{z} - m\omega_z^2 z = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = m\ddot{z} + m\dot{z}.$$

Таким образом, отклонение z удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + \left(\frac{P_{\gamma s}}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right)_s \dot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (23.8)$$

Это уравнение гармонических колебаний, амплитуда которых убывает по закону

$$\hat{z} \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \int \left(\frac{P_{\gamma s}}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right)_s dt \right]. \quad (23.9)$$

В отсутствие излучения амплитуда \hat{z} адиабатически убывает по закону

$$\hat{z} \sim \exp \left[-\frac{1}{2} \int \frac{\dot{E}}{E} dt \right] = \exp \left[\int d \ln E^{-1/2} \right] = E^{-1/2}. \quad (23.10)$$

Этот результат согласуется с формулой (18.14), если скорость считать постоянной и равной c .

Полагая $\dot{E}_s = 0$, $E_s = \text{const}$, получим, что амплитуда

$$\hat{z} \sim \exp \left(-\frac{1}{\tau_z} \right),$$

где

$$\frac{1}{\tau_z} = \alpha_z = \frac{1}{2} \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \quad (23.11)$$

и α_z — радиационный показатель затухания вертикальных бетатронных колебаний.

Радиальные бетатронные колебания. Рассмотрение радиальных бетатронных колебаний аналогично рассмотрению вертикальных колебаний с той лишь разницей, что начало отсчета отклонения x в бетатронных колебаниях не фиксировано. Действительно, замкнутая орбита x_f , от которой отклоняется частица в результате бетатронных колебаний, меняется в зависимости от энергии частицы, которая в свою очередь меняется при излучении. Следовательно, уравнение для радиальных колебаний будет аналогично уравнению (23.8), необходимо лишь дополнительно учесть смещение замкнутой орбиты, введя силу $-\ddot{x}_f$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{P_{\gamma}}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right)_s \dot{x} + \omega_x^2 x = -\ddot{x}_f. \quad (23.12)$$

Ниже покажем, что

$$\ddot{x}_f = -\frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left(2 - \alpha \frac{R}{\rho} \right) \dot{x}. \quad (23.13)$$

Учитывая это, уравнение радиальных колебаний запишем в виде

$$\ddot{x} + \left[\frac{P_{\gamma}}{E} \left(\alpha \frac{R}{\rho} - 1 \right) + \frac{\dot{E}}{E} \right] \dot{x} + \omega_x^2 x = 0, \quad (23.14)$$

откуда видим, что радиационный показатель затухания радиальных бетатронных колебаний

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left(\alpha \frac{R_s}{\rho_s} - 1 \right). \quad (23.15)$$

Покажем справедливость соотношения (23.13). Выберем в качестве замкнутых (равновесных) орбит x_f семейство орбит, которые являются замкнутыми с учетом потерь энергии на синхротронное излучение в классическом приближении и с учетом ее возрастания в ускоряющем промежутке. Имеем

$$\dot{x}_f = \frac{dx_f}{dE} \frac{d}{ds_f} (E - E_f) \frac{ds_f}{dt} = \frac{\alpha R_s}{E_s} c \frac{d}{ds_f} (E - E_f), \quad (23.16)$$

причем

$$c \frac{d}{ds_f} (E - E_f) = - \left(P_{\gamma} \frac{ds}{ds_f} - P_{\gamma f} \right). \quad (23.17)$$

Здесь s и s_f — соответственно длины дуг траектории и реперной орбиты, связанные соотношением $\frac{ds}{ds_f} = 1 + \frac{x}{\rho_s}$.

Согласно формуле (23.6) мощность, излучаемая при движении по замкнутой орбите,

$$P_{\gamma f} = P_{\gamma s} \left[1 + \left(4 - 2\alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{\Delta E}{E} \right]$$

и с точностью до величин первого порядка малости

$$c \frac{d}{ds_f} (E - E_f) = - P_{\gamma s} \left(2 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{x}{\alpha R_s}, \quad (23.18)$$

и, следовательно,

$$\dot{x}_f = - \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left(2 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) x,$$

что согласуется с формулой (23.13).

Синхротронные колебания. Синхротронные колебания в отсутствие излучения и без учета адиабатического затухания удовлетворяют в линейном приближении уравнению (16.22)

$$\frac{d^2 \Delta E}{dt^2} = - \Omega^2 \Delta E. \quad (23.19)$$

Потери на излучение вызывают дополнительное изменение энергии $d\Delta E_{\gamma}/dt$, которое должно быть учтено в предыдущем уравнении.

Преобразуем это выражение

$$\frac{d\Delta E_\gamma}{dt} = c \frac{d}{ds_s} (E_f - E_s) \frac{ds_s}{ds_f} = - \left(P_{\gamma f} - P_{\gamma s} \frac{ds_s}{ds_f} \right). \quad (23.20)$$

Согласно формуле (23.6), имеем

$$\dot{P}_{\gamma f} = P_{\gamma s} \left[1 + \left(4 - 2\alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) (\Delta E/E_s) \right].$$

Кроме того,

$$ds_s/ds_f = 1 - x_f/\rho = 1 - \alpha (R_s/\rho_s) (\Delta E/E_s),$$

откуда

$$\frac{d\Delta E_\gamma}{dt} = -P_{\gamma s} \left(4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{\Delta E}{E_s} \quad (23.21)$$

и

$$\frac{d^2 \Delta E_\gamma}{dt^2} = -\frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left[4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right] \frac{d}{dt} \Delta E. \quad (23.22)$$

Учитывая этот член в уравнении (23.19), получим для синхротронных колебаний в присутствии излучения следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \Delta E}{dt^2} + \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left[4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right] \frac{d}{dt} \Delta E + \Omega^2 \Delta E = 0. \quad (23.23)$$

Таким образом, показатель затухания синхротронных колебаний

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left[4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right]. \quad (23.24)$$

23.2. Квантованное излучение и распределение электронов

Использование понятия фотонов. Вместо классического выражения излучаемой мощности P_γ введем теперь выражение $\overline{P}_\gamma(t) = \frac{d}{dt} \sum \varepsilon_i \delta(t - t_i)$, которое представляет собой мощность излучения в виде отдельных фотонов энергии ε_i , испускаемых в момент t_i ; мощность $\overline{P}_\gamma(t)$ быстро меняется во времени.

В среднем по большому числу отдельных актов излучения $\overline{\overline{P}}_\gamma = P_\gamma$. По отношению к каждому фотону энергии ε мощность квантованного излучения должна удовлетворять равенству $\int \overline{\overline{P}}_\gamma dt = \varepsilon$. Кроме того, допустим, что углы φ_x, φ_z между направлением излучения отдельного фотона и средним направлением излучения, которое совпадает с направлением вектора скорости электрона, являются случайными.

и **Вертикальные бетатронные колебания.** Вертикальная компонента силы торможения излучением, действующей на частицу,

$$\ddot{f}_z = -\frac{\tilde{P}_\gamma}{c} \left(\frac{\dot{z}}{c} + \varphi_z \right), \quad (23.25)$$

и уравнение бетатронных колебаний получим в результате обобщения уравнения (23.8)

$$\ddot{z} + \left(\frac{P_\gamma}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right)_s \dot{z} + \omega_z^2 z = -c \frac{\tilde{P}_{\gamma s}}{E_s} \varphi_z. \quad (23.26)$$

При этом в показателе затухания флуктуирующая функция \tilde{P}_γ заменена ее средней величиной. Таким образом, флуктуации входят в уравнение вертикальных бетатронных колебаний только в правую часть и связаны с флуктуациями направления излучения фотона.

Радиальные бетатронные колебания. По аналогии с вертикальным движением уравнение радиальных колебаний также содержит дополнительный член, равный $-P_\gamma \varphi_x / c$. Кроме того, уравнение для координаты x отличается от уравнения для z членом $-\ddot{x}_f$, стоящим справа и вызванным смещением замкнутой орбиты. Этот член также флуктуирующий, так как мгновенная замкнутая орбита смещается внезапно, в результате резкого толчка, всякий раз, когда происходит излучение фотона. Таким образом, уравнение для x -колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + \left(\frac{P_\gamma}{E} + \frac{\dot{E}}{E} \right)_s \dot{x} + \omega_x^2 x = -c \frac{\tilde{P}_\gamma}{E_s} \varphi_x - \ddot{x}_f. \quad (23.27)$$

Проведем преобразования, аналогичные (23.16) и (23.17):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_f &= -\frac{\alpha R_s}{E_s} \left(\tilde{P}_\gamma \frac{ds}{ds_f} - P_{\gamma f} \right) = -\frac{\alpha R_s}{E_s} \left(P_\gamma \frac{[ds]}{ds_f} - P_{\gamma f} \right) - \\ & - \frac{\alpha R_s}{E_s} (\tilde{P}_\gamma - P_\gamma) \frac{ds}{ds_f} \approx \dot{x}_f - \frac{\alpha R_s}{E_s} [(\tilde{P}_{\gamma s} - P_{\gamma s}) + \dots]; \end{aligned} \quad (23.28)$$

$$\ddot{x}_f = \ddot{x}_f - \frac{\alpha R_s}{E_s} \tilde{P}_{\gamma s}, \quad (23.29)$$

где \dot{x}_f определено (23.13) и связано с излучением в классическом приближении.

Уравнение радиальных бетатронных колебаний принимает вид

$$\ddot{x} + \left[\frac{P_{\gamma s}}{E} \left(\frac{R}{\rho} \alpha - 1 \right) + \frac{\dot{E}}{E} \right]_s \dot{x} + \omega_x^2 x = -c \frac{\tilde{P}_{\gamma s}}{E_s} \varphi_x + \frac{\alpha R_s}{E_s} \tilde{P}_{\gamma s}. \quad (23.30)$$

Первый член, стоящий справа, пренебрежимо мал по сравнению со вторым.

Синхротронные колебания. Потери энергии на излучение приводят к дополнительному изменению энергии на величину $d\Delta\tilde{E}_\gamma/dt$, которое должно быть учтено в уравнении колебаний (23.19). По аналогии с расчетами в классическом приближении (23.20) — (23.22) эти потери энергии с учетом флуктуаций излучения можно представить в виде

$$\frac{d\Delta\tilde{E}_\gamma}{dt} = - \left(\tilde{P}_{\gamma f} - P_{\gamma s} \frac{ds_s}{ds_f} \right) = - \left(P_{\gamma f} - P_{\gamma s} \frac{ds_s}{ds_f} \right) - \left(\tilde{P}_{\gamma f} - P_{\gamma f} \right) = - P_{\gamma s} \left(4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s} \right) \frac{\Delta E}{E_s} - \left(\tilde{P}_{\gamma s} - P_{\gamma s} \right) + \dots \quad (23.31)$$

Откуда получаем

$$\frac{d^2 \Delta\tilde{E}_\gamma}{dt^2} = - \frac{P_{\gamma s}}{E_s} \left(4 - \frac{R}{\rho} \alpha \right) \frac{d}{dt} \Delta E - \tilde{P}_{\gamma s}. \quad (23.32)$$

Учитывая это дополнительное изменение энергии в уравнении (23.19), которое справедливо в отсутствие излучения, получим уравнение синхротронных колебаний с учетом излучения, но без учета адиабатического затухания:

$$\frac{d^2 \Delta\tilde{E}}{dt^2} + \frac{P_{\gamma s}}{E} \left(4 - \frac{R}{\rho} \alpha \right) \frac{d\Delta E}{dt} + \Omega^2 \Delta E = - \tilde{P}_{\gamma s}. \quad (23.33)$$

Интегрирование уравнения движения (стационарный режим)

Будем предполагать $\tilde{E}_s/E_s \ll \alpha_k$ ($k = x, z, s$), тогда уравнения колебаний (23.26), (23.30) и (23.33) примут вид

$$\ddot{y} + 2\alpha_k \dot{y} + \omega^2 y = f(t), \quad (23.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y = & \quad x & \quad z & \quad \Delta E \\ \alpha_k = & \quad \alpha_x & \quad \alpha_z & \quad \alpha_s \\ \omega = & \quad \omega_x & \quad \omega_z & \quad \Omega \\ f(t) = & \frac{\alpha R_s}{E_s} \left(\frac{\rho_s}{R_s} \right) \times & - \frac{c}{E_s} \left(\frac{\rho_s}{R_s} \right) \times & - \frac{\rho_s}{R_s} \left(\tilde{P}_\gamma \right)_M \\ & \times \left(\tilde{P}_\gamma \right)_M & \times \left(\tilde{P}_\gamma \varphi_z \right)_M; & \end{aligned} \right\} \quad (23.35)$$

Здесь коэффициент ρ_s/R_s учитывает наличие прямолинейных участков в ускорителе. В приближении сглаженного движения азимутальная структура игнорируется; при этом принимается, что равномерное во времени излучение с тем же спектральным составом, что и при движении в секторном поле, происходит в ρ_s/R_s раз реже. Решение уравнения (23.35) имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_{t_i}^t f(\tau) e^{-\alpha_k(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau + y_0(t). \quad (23.36)$$

Для получения стационарного решения следует положить $t_i = -\infty$. При этом свободные колебания, описываемые решением однородного уравнения $y_0(t) = y_i e^{-\alpha(t-t_i)} \sin(\omega t + \delta)$, затухают. Предполагая, что затухание за период колебания мало, $\alpha \ll \omega$, после интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \tilde{P}_\gamma e^{-\alpha_k(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau &= \\ &= \int_{-\infty}^t \tilde{P}_\gamma e^{-\alpha_k(t-\tau)} \cos \omega(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (23.37)$$

Используя представление излучаемой мощности \tilde{P}_γ через энергию фотонов, запишем последнее выражение в виде

$$\left. \begin{aligned} \int \tilde{P}_\gamma e^{-\alpha_k(t-\tau)} \cos \omega(t-\tau) d\tau &= \sum_{\tau_i=-\infty}^t \varepsilon_i e^{-\alpha_k(t-\tau_i)} \times \\ &\times \cos \omega(t-\tau_i) = \sum \delta a_1 = A_1; \\ \int \tilde{P}_\gamma \varphi_z e^{-\alpha_z(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau &= \sum_{\tau_i=-\infty}^t \varepsilon_i \varphi_{z_i} \times \\ &\times e^{-\alpha_z(t-\tau_i)} \sin \omega(t-\tau_i) = \sum \delta a_2 = A_2, \end{aligned} \right\} \quad (23.38)$$

где ε_i и φ_i — величины случайные и независимые; очевидно, величины сумм A_1 и A_2 также случайные. Их можно характеризовать статистическим распределением с плотностью вероятности $dp(A)/dA$.

Центральная предельная теорема [см. гл. 14] утверждает: пусть имеется величина $A = \sum \delta a_i (i=1, \dots, N)$, где δa_i — случайные независимые величины, среднеквадратичное значение которых $(\delta a)^2$ одинаково для любого i , в этом случае распределение $dp(A)/dA$ является гауссовским

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp(A)}{dA} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A^2}} e^{-\frac{A^2}{2A^2}}, \\ \text{где} \quad \overline{A^2} &= N (\overline{\delta a})^2 \end{aligned} \right\} \quad (23.39)$$

В обоих выражениях (23.38) слагаемые δa_i суммы удовлетворяют условиям центральной предельной теоремы:

$$\overline{(\delta a)^2} = \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{\varepsilon^2 (\varphi^2)} [e^{-\alpha_k(t-\tau)} \cos \omega(t-\tau)]^2}{\overline{\varepsilon^2 \varphi^2} [e^{-\alpha_k(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau)]^2} \end{aligned} \right\}; \quad (23.40)$$

оба выражения в квадратных скобках под чертой равны

$$\frac{1}{\Delta\tau} \int_{-\infty}^t |j|^2 d\tau = \frac{1}{\Delta\tau} \frac{1}{4\alpha_h} = \frac{\dot{N}}{N} \cdot \frac{1}{4\alpha_h},$$

где N — число излученных фотонов за время $\Delta\tau$ и \dot{N} — частота испускания фотонов.

Таким образом, в силу центральной предельной теоремы

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1^2 &= \frac{\dot{N}\bar{\epsilon}^2}{4\alpha_h} = \frac{\rho}{R} \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{4\alpha_h}; \\ \bar{A}_2^2 &= \frac{\dot{N}\bar{\epsilon}^2}{4\alpha_z} \bar{\varphi}_z^2 = \frac{\rho}{R} \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{8\alpha_h \gamma^2}. \end{aligned} \right\} \quad (23.41)$$

В последнем равенстве $\bar{\varphi}_z^2$ заменено на $1/2\gamma^2$ в соответствии с (21.5).

Умножая \bar{A}_1^2 и \bar{A}_2^2 на соответствующие коэффициенты, получим

$$\bar{x}^2 = \left(\frac{\alpha R_s}{E_s}\right)^2 \left(\frac{\rho_s}{R_s}\right) \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{4\alpha_x}; \quad (23.42)$$

$$\bar{z}^2 = \left(\frac{R_s}{v_z E_s \gamma}\right)^2 \left(\frac{\rho_s}{R_s}\right) \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{4\alpha_z}; \quad (23.43)$$

$$\overline{(\Delta E)^2} = \left(\frac{\rho_s}{R_s}\right) \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{4\alpha_s}, \quad (23.44)$$

или, вводя смещение частицы по азимуту $(s - s_s)$, соответствующее скачку $\Delta E/E$, имеем

$$\overline{(s - s_s)^2} = \left(\frac{\alpha c}{\Omega E_s}\right)^2 \frac{\rho_s}{R_s} \frac{(\dot{N}\bar{\epsilon}^2)_M}{4\alpha_s}. \quad (23.45)$$

Уравнение для энергии. Рассмотрим радиальные бетатронные колебания, уравнения которых с учетом (23.38) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= R\alpha \sum_k \frac{\epsilon_k}{E_k} e^{-\int_{E_k}^E \left(\alpha_x + \frac{1}{2} \frac{E_k}{E}\right) dt} \cos \omega_x (t - t_k) + \\ &+ x_i e^{-\int_{E_i}^E \left(\alpha_x + \frac{1}{2} \frac{E_i}{E}\right) dt} \cos [\omega (t - t_i) + \delta_i]. \end{aligned} \quad (23.46)$$

Второй член вызван начальным отклонением от равновесного положения. Из этого уравнения видно, что излучение k -го фотона в момент времени t_k приводит к увеличению отклонения x на величину $\delta x_k = (\alpha R/E_k) \epsilon_k \cos \varphi_k$ и появлению колебаний с бетатронной частотой. Амплитуда δx_k этих колебаний экспоненциально затухает.

Квадрат отклонения x при излучении k -го фотона возрастает на величину

$$\delta(x)_k^2 = (x + \delta x_k)^2 - x^2 = 2x\delta x_k + (\delta x_k)^2.$$

Для произвольной фазы бетатронных колебаний положительные и отрицательные x равновероятны. Поэтому в среднем

$$\overline{\delta(x^2)_k} = \overline{(\delta x)_k^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R}{E_k} \right)^2 \varepsilon_k^{-2} = \delta(\hat{x}^2)_k. \quad (23.47)$$

Последнее равенство следует из того, что $\hat{x}^2 = x^2 + x^2/\omega_x^2$ и прирост $(\delta x)_k^2 = 0$. (Скорость частицы на замкнутой орбите не меняется в результате отклонения на величину $\delta x_f = \delta x$ во время излучения фотона.) Кроме того, в течение малого интервала времени δt_h между двумя последовательными излучениями фотонов амплитуда уменьшается в среднем, согласно уравнению (23.46), на величину

$$\overline{\delta(\hat{x}^2)_k} = - \left(2\alpha_x + \frac{\dot{E}}{E} \right) (\hat{x}^2)_k \delta t_h. \quad (23.48)$$

В итоге за время δt_h , в течение которого происходит излучение фотона, оба эффекта дают вклад

$$\overline{\delta(\hat{x}^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R}{E} \right)^2 \varepsilon^{-2} - \left(2\alpha_x + \frac{\dot{E}}{E} \right) \hat{x}^2 \delta t_h.$$

За время, в течение которого происходит много актов излучения, изменение квадрата амплитуды описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R}{E} \right)^2 \dot{N} \varepsilon^2 - \left(2\alpha_x + \frac{\dot{E}}{E} \right) \hat{x}^2, \quad (23.49)$$

которое учитывает изменение энергии со временем $E(t)$.

Для $\dot{E} = 0$ пучок стационарен и в соответствии с формулой (23.42)

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^2 = 0; \quad \hat{x}^2 = \left(\frac{\alpha R}{E} \right)^2 \frac{\dot{N} \varepsilon^2}{4\alpha_x} = \left(\frac{\alpha R}{E} \right)^2 \left(\frac{\rho}{R} \right) \frac{(\dot{N} \varepsilon^2)_M}{4\alpha_x}. \quad (23.50)$$

Решение уравнения (23.49) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_f^2 = & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha R}{E_f} \right)^2 \frac{\rho}{R} \int_{E_i}^{E_f} (\dot{N} \varepsilon^2)_M \frac{E_f}{E} e^{-2 \int_E^{E_f} \alpha_x dt'} dt + \\ & + \hat{x}_i^2 \frac{E_i}{E_f} e^{-2 \int_{E_i}^{E_f} \alpha_x dt}. \end{aligned} \quad (23.51)$$

Второй член вызван по-прежнему начальными условиями.

Для синхротронных колебаний можно получить уравнение, аналогичное уравнению (23.49):

$$\frac{d}{dt} (\overline{\Delta E})^2 = \frac{1}{2} \dot{N} \overline{\varepsilon^2} - \left(2\dot{\alpha}_s - \frac{1}{2} \frac{\dot{E}}{E} \right) (\overline{\Delta E})^2. \quad (23.52)$$

Это уравнение учитывает адиабатическое затухание, определяемое формулой (18.9). Амплитуда ВЧ-напряжения в ускоряющем промежутке и синхронная фаза предполагаются фиксированными.

Глава 24

РАДИАЦИОННОЕ ЗАТУХАНИЕ И РАЗМЕРЫ ПУЧКА (общая теория)

24.1. Классическое затухание амплитуды

Бетатронные колебания. Покажем вначале, что амплитуда невозмущенных колебаний является инвариантом.

Введем комплексный инвариант A невозмущенных бетатронных колебаний, под которым, как будет показано ниже, можно понимать обобщенную амплитуду псевдогармонических колебаний. Впоследствии будет установлен закон возрастания A под действием излучения.

В отсутствие электромагнитного излучения или ускорения траектория частицы в поле ускорителя определяется выражением [см. формулу (7.22)]

$$y(s) = a\beta^{1/2} \cos \int_0^s \frac{ds}{\beta} + b\beta^{1/2} \sin \int_0^s \frac{ds}{\beta} \quad (24.1)$$

или

$$y = AY + A^* Y^*, \quad (24.2)$$

где

$$Y = \beta^{1/2} e^{+i \int \frac{ds}{\beta}}; \quad Y^* = \beta^{1/2} e^{-i \int \frac{ds}{\beta}} \quad (24.3)$$

и

$$A = \frac{1}{2} (a - ib); \quad A^* = \frac{1}{2} (a + ib). \quad (24.4)$$

Согласно уравнениям (7.20) и (7.21) Y и Y^* являются собственными функциями уравнения траекторий и удовлетворяют, в частности, соотношениям

$$Y' = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{2} \beta' + i \right) Y; \quad Y'^* = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{2} \beta' - i \right) Y^*. \quad (24.5)$$

Величина A является инвариантом траектории; ее абсолютное значение

$$|\dot{A}| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (24.6)$$

может быть истолковано как обобщенная амплитуда псевдогармонического колебания.

Из формулы (24.2) и продифференцированного уравнения получаем

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega} (yY'^* - y'Y^*); \\ A^* &= -\frac{1}{\omega} (yY' - y'Y). \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

Величина, заключенная в скобки, является вронскианом

$$\omega = Y Y'^* - Y^* Y' = \text{const} = -2i.$$

Легко убедиться, что

$$|A|^2 = A A^* = \frac{1}{4} C, \quad (24.8)$$

где C — инвариант Куранта-Снайдера, введенный ранее в уравнение (8.9).

В этом разделе мы учитываем только среднее воздействие электромагнитного излучения электрона на траекторию, предполагая излучение непрерывным с мощностью P_γ и направленным вперед. На малом пробеге энергия меняется на величину dE , что вызывает изменение координат бетатронных колебаний соответственно на величины

$$dy = \frac{dy}{dE} dE = \frac{dy}{dE} \cdot \frac{dE}{ds} ds; \quad dy' = \frac{dy'}{dE} \cdot \frac{dE}{ds} ds. \quad (24.9)$$

Амплитуда $|A|$ меняется согласно уравнениям (24.7)

$$\left. \begin{aligned} dA &= \frac{1}{\omega} (Y'^* dy - Y^* dy'); \\ dA^* &= -\frac{1}{\omega} (Y' dy - Y dy'). \end{aligned} \right\} \quad (24.10)$$

Дифференцируя $A^2 = A A^*$, имеем

$$2|A| d|A| = A dA^* + A^* dA,$$

и учитывая уравнения (24.7), получаем выражение

$$2|A|d|A| = \frac{1}{\omega} [(A^*Y'^* - AY') dy - (A^*Y^* - AY) dy'], \quad (24.11)$$

в котором dy и dy' определяются формулой (24.9).

Это уравнение пригодно для рассмотрения двух мод колебаний по x - и z -направлениям, для чего вместо A , Y , y следует подставить соответственно A_x , X , x или A_z , Z , z .

Рассмотрим теперь величины dy/dE и dy'/dE .

Поскольку сила реакции излучения направлена в противоположную от направления движения сторону, изменение энергии на величину dE_{γ} , вызванное излучением на малом пробеге ds , не изменяет ни положения частицы, ни наклона ее траектории, т. е. $dz_{\gamma} = 0$; $dz'_{\gamma} = 0$. С другой стороны, поскольку ускоряющее поле параллельно оси пучка, изменение энергии на величину $dE_{вч}$ вследствие ускорения на малом пробеге ds не влияет на положение частицы, но приводит к изменению наклона траектории на

$$dz'_{уск} = -z' \frac{dE_{уск}}{E} = -(A_z Z' + A^* Z'^*) \frac{dE_{уск}}{E}.$$

Таким образом, только ускоряющее поле вызывает возмущение нормальных бетатронных колебаний*.

В качестве начала координат $z(s)$ и $z'(s)$ при рассмотрении вертикальных колебаний выбирается медианная плоскость. Координаты $x(\Delta E, s)$ и $x'(\Delta E, s)$ бетатронных радиальных колебаний частицы с мгновенной энергией $E = E_s + \Delta E$ отсчитываются от центральной линии монохроматического пучка той же энергии. Эта центральная линия является действительной замкнутой траекторией, при движении по которой потери энергии на излучение $dE_{\gamma f}/ds_f = -\frac{1}{c} P_{\gamma f}$ равны приросту энергии при прохождении ускоряющего промежутка.

Пусть энергия некоторой частицы при излучении на пробеге ds меняется на dE_{γ} . Тогда координаты бетатронных радиальных колебаний, помимо своего нормального изменения, меняются скачкообразно на величину

$$dx_{\gamma} = -\frac{R_g}{E} (dE_{\gamma} - dE_{\gamma f}); \quad dx'_{\gamma} = -\frac{R_g'}{E} (dE_{\gamma} - dE_{\gamma f});$$

с другой стороны,

$$dx'_{уск} = -x' \left(\frac{dE}{E} \right)_{уск} = -(A_x X' + A^* X'^*) \frac{dE_{уск}}{E}.$$

* Этот результат согласуется с результатом предыдущей главы, поскольку показатель затухания $(P_{\gamma}/E + \dot{E}/E)$, определяемый формулой (23.9), отличен от нуля только в присутствии внешнего ускоряющего поля.

Таким образом, имеем следующие изменения координат и скоростей для бетатронных колебаний:

Координата	Вследствие излучения	Вследствие ускорения
dx	$-\frac{Rg}{E} (dE_{\gamma} - dE_{\gamma f})$	0
dx'	$-\frac{Rg'}{E} (dE_{\gamma} - dE_{\gamma f})$	$-(A_x X' + A_x'^* X'^*) \times$ $\times \frac{dE_{\text{уск}}}{E}$
dz	0	0
dz'	0	$-(A_z Z' + A_z'^* Z'^*) \times$ $\times \frac{dE_{\text{уск}}}{E}$

(24.12)

Продолжим рассмотрение формулы (24.9). Для равновесной частицы имеем

$$dE_{\gamma f} = -\frac{1}{c} P_{\gamma f} ds_f.$$

Разложим dE_{γ} в ряд по малым отклонениям от равновесной орбиты. Пусть s , s_f , s_s — соответственно длина дуги траектории рассматриваемой частицы, длина дуги реперной орбиты и длина дуги синхронной орбиты. Энергия электрона вследствие излучения меняется на величину

$$dE_{\gamma} = -\frac{1}{c} P_{\gamma} ds = -\frac{1}{c} P_{\gamma} \frac{ds}{ds_f} ds_f \quad (24.13)$$

и

$$dE_{\gamma} - dE_{\gamma f} = -\frac{1}{c} \left(P_{\gamma} \frac{ds}{ds_f} - P_{\gamma f} \right) ds_f.$$

Раскладывая это выражение в ряд, имеем

$$P_{\gamma} = P_{\gamma s} + \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial x} \right)_s (x_f + x) + \left(\frac{\partial P_{\gamma}}{\partial E} \right)_s \Delta E = P_{\gamma s} \left[1 - 2nK_s (AX + \right. \\ \left. + A^* X^*) + 2(1 - nK_s R_s g) \frac{\Delta E}{\Delta E_s} \right]. \quad (24.14)$$

Этот результат получен путем использования следующих формул и обозначений: $P_{\gamma} = P_{\gamma s} \frac{B^2 E^2}{B_s^2 E_s^2}$ [см. формулу (20.44)];

$$\left. \begin{aligned} \frac{B^2}{B_s^2} &= 1 - 2n K_s (x_f + x); & \frac{E^2}{E_s^2} &= 1 - 2 \frac{\Delta E}{E_s}; \\ x_f &= Rg \frac{\Delta E}{E_s}; & x &= AX + A^* X^*; \\ K_s &= \frac{1}{\rho_s}; & n &= - \left(\frac{\rho dB}{B dx} \right)_s. \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

Далее, $\frac{P_{\gamma s}}{E_s} = \frac{2}{3} r_0 c \gamma_s^3 K_s^2$ [см. формулу (20.43)] и вследствие существования кривизны орбиты

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{ds_f} &= 1 + K_s x = 1 + K_s (AX + A^* X^*); \\ \frac{ds_s}{ds_f} &= 1 - R_s g K_s \frac{\Delta E}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (24.16)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_s} \cdot \frac{d}{ds_f} (E_{\gamma} - E_{\gamma f}) &= - \frac{1}{c E_s} \left(P_{\gamma} \frac{ds}{ds_f} - P_{\gamma f} \right) = - \frac{2}{3} r_0 \gamma_s^3 (1 - 2n) \times \\ &\times K_s^3 (AX + A^* X^*); \end{aligned} \quad (24.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_s} \cdot \frac{d}{ds_f} (E_{\gamma f} - E_{\gamma s}) &= - \frac{1}{c E_s} \left(P_{\gamma f} - P_{\gamma s} \frac{ds_s}{ds_f} \right) = - \frac{2}{3} r_0 \gamma_s^3 \times \\ &\times [2K_s^2 + R_s (1 - 2n) g K_s^3] \frac{\Delta E}{E_s}. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Таким образом, работу ускоряющего поля можно разложить на две части: одна из них идет на компенсацию энергетических потерь при излучении, другая — на ускорение частицы. В среднем на одно-синхротронное колебание имеем

$$\frac{1}{E_s} \left(\frac{dE}{ds} \right)_{\text{учк}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\overline{P_{\gamma s}}}{E_s} + \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{ds}. \quad (24.19)$$

Преобразуем теперь в выражении (24.9) $dy/ds = (dy/dE) \times (dE/ds)$ и аналогичное выражение для dy'/ds , используя для производной d/ds формулы (24.17) и (24.19), а для производной d/dE — формулу (24.12). Индексы впредь будем опускать. Получаем следующие выражения для изменения положения частицы вследствие излучения:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds} \right)_{\gamma} &= \frac{2}{3} r_0 \gamma^3 Rg (1 - 2n) K_s^3 (A_x X + A_x^* X^*); \\ \left(\frac{dx'}{ds} \right)_{\gamma} &= \frac{2}{3} r_0 \gamma^3 Rg' (1 - 2n) K_s^3 (A_x X + A_x^* X^*); \end{aligned} \right\} \quad (24.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dz}{ds}\right)_{\gamma} &= 0; \\ \left(\frac{dz'}{ds}\right)_{\gamma} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.40)$$

и вследствие ускорения частицы

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds}\right)_{\text{уск}} &= 0; \\ \left(\frac{dx'}{ds}\right)_{\text{уск}} &= -(A_x X' + A_x^* X'^*) \left(\frac{1}{c} \cdot \overline{P_{\gamma s}} + \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{ds}\right); \\ \left(\frac{dz}{ds}\right)_{\text{уск}} &= 0; \\ \left(\frac{dz'}{ds}\right)_{\text{уск}} &= -(A_z Z' + A_z^* Z'^*) \left(\frac{1}{c} \cdot \overline{P_{\gamma s}} + \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{ds}\right). \end{aligned} \right\} \quad (24.21)$$

Перейдем теперь к уравнению для изменения амплитуды.

Согласно выражению (24.11) и учитывая, что изменение положения частицы происходит вследствие излучения (γ) и ускорения, имеем

$$2|A| \frac{d|A|}{ds} = \frac{1}{\omega} (A^* Y'^* - AY') \left(\frac{dy}{ds}\right)_{\gamma} - \frac{1}{\omega} (A^* Y^* - AY) \left(\frac{dy'}{ds}\right)_{\gamma} + \\ + \frac{1}{\omega} (A^* Y'^* - AY') \left(\frac{dy}{ds}\right)_{\text{уск}} - \frac{1}{\omega} (A^* Y^* - AY) \left(\frac{dy'}{ds}\right)_{\text{уск}}. \quad (24.22)$$

Подставляя (24.20) и (24.21) в эту формулу, получим следующее выражение (четыре слагаемых в нем записаны в том же порядке, что и выше):

$$2|A_x| \frac{d|A_x|}{ds} = \frac{1}{\omega} (A_x^* X'^* - A_x X') \frac{2}{3} r_0 \gamma^3 Rg(1-2n) \times \\ \times K_s^3 (A_x X + A_x^* X^*) - \frac{1}{\omega} (A_x^* X^* - A_x X) \frac{2}{3} r_0 \gamma^3 Rg'(1-2n) \times \\ \times K_s^3 (A_x X + A_x^* X^*) + 0 + \frac{1}{\omega} (A_x^* X^* - A_x X) (A_x X + A_x^* X') \times \\ \times \left(\frac{1}{c} \cdot \overline{P_{\gamma s}} + \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{ds}\right); \quad (24.23)$$

$$2|A_z| \frac{d|A_z|}{ds} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\omega} (A_z^* Z'^* - A_z Z) (A_z Z' + A_z^* Z'^*) \times \\ \times \left(\frac{1}{c} \cdot \overline{P_{\gamma s}} + \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{ds}\right). \quad (24.24)$$

Найдем теперь среднее локальное значение этих выражений, т. е. среднее по большому числу оборотов или по всем фазам собствен-

ных функций для определенной точки s , и затем среднее значение за один оборот.

Заметим, что при усреднении по большому числу оборотов с учетом выражений (24.3) и (24.5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega} \overline{(A^* Y'^* - AY')(AY + A^* Y^*)} &= |A|^2; \\ \frac{1}{\omega} \overline{(A^* Y^* - AY)(AY + A^* Y^*)} &= 0; \\ \frac{1}{\omega} \overline{(A^* Y^* - AY)(AY' + A^* Y'^*)} &= -|A|^2. \end{aligned} \right\} \quad (24.25)$$

Заменим производную по натуральному параметру производной по времени $\frac{d}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d}{dt}$. В итоге приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{|\bar{A}_x|} \cdot \frac{d|\bar{A}_x|}{dt} &= -\alpha_x - \frac{1}{2} \frac{1}{E_s} \frac{dE_s}{dt}; \\ \frac{1}{|\bar{A}_z|} \cdot \frac{d|\bar{A}_z|}{dt} &= -\alpha_z - \frac{1}{2} \frac{1}{E_s} \frac{dE_s}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (24.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{1}{2} \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s} \left[1 - R_s \frac{g(1-2n)K_s^3}{\bar{K}_s^2} \right], \\ \alpha_z &= \frac{1}{2} \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s}. \end{aligned} \right\} \quad (24.27)$$

Напомним, что согласно (20.43)

$$\frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s} = \frac{2}{3} r_0 c \gamma^3 \bar{K}_s^2,$$

α_x и α_z — показатели затухания; $\tau_x = 1/\alpha_x$ и $\tau_z = 1/\alpha_z$ — характерные времена затухания амплитуды бетатронных колебаний вследствие электромагнитного излучения. Член $-\frac{1}{2E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}$ описывает адиабатическое затухание в соответствии с теоремой Эренфеста (18.14).

Синхротронные колебания. В результате действия поля в уско-ряющем промежутке энергия частицы E испытывает синхротронные колебания около средней синхронной энергии E_s . При постоянной синхронной энергии и в отсутствие излучения разница энергий $\Delta E = E - E_s$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta E + \Omega^2 \Delta E = 0. \quad (24.28)$$

Для релятивистских частиц угловая частота колебаний при $\eta \approx \alpha$ согласно формуле (16.21) равна

$$\Omega = \frac{c}{R_s} \sqrt{\frac{h\alpha e V_{вч} \cos \varphi_s}{2\pi E_s}}. \quad (24.29)$$

Решение уравнения колебания имеет вид

$$\Delta E = \hat{\Delta} E \sin \Omega t. \quad (24.30)$$

Излучение вызывает дополнительное изменение энергии

$$\frac{d}{dt} \Delta E_\gamma = c \frac{d}{ds_f} (E_{\gamma f} - E_{\gamma s}).$$

Принимая во внимание формулы (24.18) и (20.43) и усредняя это уравнение по одному обороту, получим

$$\frac{d}{dt} \Delta E_\gamma = -\frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s} \left[2 + R_s (1 - 2n) g K_s^3 / K_s^2 \right] \Delta E. \quad (24.31)$$

Дифференцируя полученное уравнение второй раз по времени и добавляя его к уравнению (24.28), найдем уравнение колебаний с учетом излучения

$$\frac{d^2 \Delta E}{dt^2} - \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s} \left[2 + \frac{R_s (1 - 2n) g K_s^3}{K_s^2} \right] \frac{d}{dt} \Delta E + \Omega^2 \Delta E = 0, \quad (24.32)$$

откуда показатель затухания амплитуды $\hat{\Delta} E$

$$\alpha_s = -\frac{1}{\hat{\Delta} E} \left(\frac{d}{dt} \hat{\Delta} E \right)_\gamma = \frac{1}{2} \frac{\bar{P}_{\gamma s}}{E_s} \left(2 + R_s \frac{(1 - 2n) g K_s^3}{K_s^2} \right). \quad (24.33)$$

На адиабатическое затухание амплитуды $\hat{\Delta} E$ вследствие изменения E_s накладывается затухание, вызванное излучением.

При условии, что амплитуда $\hat{V}_{вч}$ ускоряющего напряжения и синхронная фаза φ_s частицы постоянны, амплитуда адиабатически затухает в соответствии с законом (18.19):

$$\frac{1}{\hat{\Delta} E} \left(\frac{d}{dt} \hat{\Delta} E \right)_{ад} = \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{E}}{E} \right)_s.$$

Исходя из этого соотношения и уравнения (24.33), запишем уравнение изменения амплитуды синхротронных колебаний с одновременным учетом излучения и ускорения

$$\frac{1}{\hat{\Delta} E} \frac{d}{dt} \hat{\Delta} E = -\alpha_s + \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{E}}{E} \right)_s. \quad (24.34)$$

В соответствии с выводом это уравнение справедливо только для излучения в классическом приближении или в среднем по большому числу фотонов.

24.2. Квантованное излучение. Среднеквадратичное значение амплитуды

Допустим теперь, что излучение является квантованным. Обозначим A амплитуду бетатронных или синхротронных колебаний частицы. Излучение фотона вызывает изменение амплитуды колебания на δA :

$$\delta(A^2) = A\delta A^* + A^*\delta A + (\delta A)^2 = 2|A|\delta|A| + (\delta A)^2.$$

Приращения амплитуды δA , вызванные излучением фотонов, являются случайными и независимыми между собой. Пусть \dot{N} — средняя частота актов излучения. Тогда

$$\frac{d}{dt} \bar{A}^2 = 2|\bar{A}|\dot{N} \delta|\bar{A}| + \dot{N} (\delta\bar{A})^2, \quad (24.35)$$

где $\dot{N}\delta|\bar{A}| = \frac{d}{dt} |\bar{A}|$ — среднее приращение амплитуды в классическом приближении, определенное формулами (24.26) и (24.34). Уточним теперь второй член, рассмотрев вначале синхротронные колебания.

Излучение фотона с энергией ε приводит к возрастанию отклонения при синхротронном колебании на величину $\delta\Delta E = \delta E = \varepsilon$. Амплитуда синхротронных колебаний удовлетворяет соотношению

$$(\widehat{\Delta E})^2 = (\Delta E)^2 + \Omega^2 (d\Delta E/dt)^2.$$

Легко показать, что

$$\frac{d\Delta E}{dt} = \frac{\Omega^2 E_s}{\alpha c} (s - s_s), \quad (24.36)$$

где справа стоит величина, определяемая азимутом частицы ($s - s_s$), значение которого под действием излучения фотонов не испытывает внезапных изменений. Отсюда для синхротронных колебаний

$$\dot{N} (\delta\bar{A})^2 = \dot{N} (\delta\widehat{\Delta E})^2 = \dot{N} (\delta\Delta E)^2 = \dot{N}\varepsilon^2,$$

и, учитывая выражения (24.34) и (24.35), получаем

$$\frac{1}{(\widehat{\Delta E})^2} \cdot \frac{d(\widehat{\Delta E})^2}{dt} = -2\alpha_s + \frac{\dot{N}\varepsilon^2}{\widehat{\Delta E}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{E}}{E} \right)_s. \quad (24.37)$$

Для бетатронных колебаний согласно уравнениям (24.10)

$$\delta A = \frac{1}{\omega} (Y'^* \delta y - Y^* \delta y');$$

$$\delta A^* = -\frac{1}{\omega} (Y' \delta y - Y \delta y'),$$

откуда

$$\begin{aligned}
 (\delta A)^2 &= \delta A \delta A^* = -\frac{1}{\omega^2} \left[Y' Y'^* (\delta y)^2 - \frac{d}{ds} (Y Y^*) \delta y \delta y' + Y Y^* (\delta y')^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{4\beta} \left[\left(1 + \frac{1}{4} \beta'^2 \right) (\delta y)^2 - \beta \beta' \delta y \delta y' + \beta^2 (\delta y')^2 \right]. \quad (24.38)
 \end{aligned}$$

Воспользуемся значениями δy , $\delta y'$, приведенными в формуле (24.12), учитывая тот факт, что в качестве реперной частицы, от траектории которой производится отсчет положения, выбирается идеальная, $\delta E_{Yf} = 0$. Обозначая углы между направлением излучения фотона и касательной к траектории φ_x и φ_z , получим

$$\left. \begin{aligned}
 \delta x &= -Rg \frac{\varepsilon}{E}; & \delta x' &= (\varphi_x - Rg') \frac{\varepsilon}{E}; \\
 \delta z &= 0; & \delta z' &= \varphi_z \frac{\varepsilon}{E}.
 \end{aligned} \right\} \quad (24.39)$$

Средние локальные значения произведений, образованных из этих элементов и полученных в результате усреднения по большому числу оборотов, равны

$$\left. \begin{aligned}
 (\delta x)^2 &= R^2 g^2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2}; & (\delta z)^2 &= 0; \\
 \delta x \delta x' &= R^2 g g' \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2}; & \delta z \delta z' &= 0; \\
 (\delta x')^2 &= (\bar{\varphi}_x^2 + R^2 g'^2) \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2}; & (\delta z')^2 &= \bar{\varphi}_z^2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (24.40)$$

Вводя эти выражения в (24.38), получим

$$(\delta A_x)^2 = \frac{1}{4} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2} \cdot \frac{R^2}{\beta_x} \left[g^2 + \left(\beta_x g' - \frac{\beta'}{2} g \right)^2 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2} \beta_x \bar{\varphi}_x^2 \right]; \quad (24.41)$$

$$(\delta A_z)^2 = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2} \beta_z^2 \bar{\varphi}_z^2. \quad (24.42)$$

В формуле (24.41) справа пренебрежем членом $\frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2} \beta_x \bar{\varphi}_x^2$ по сравнению с другими членами, поскольку, согласно (21.5), $\bar{\varphi}_x^2 = \frac{1}{2\gamma^2}$.

Выражения (24.41) и (24.42) являются также средними за один оборот. Принимая во внимание адиабатическое затухание, окончательно получаем следующее выражение уравнения (24.35) для бета-тронных колебаний:

$$\frac{1}{\bar{A}_x^2} \cdot \frac{d\bar{A}_x^2}{dt} = -2a_x + \frac{R^2}{4\bar{A}_x^2} \times \\
 \times \left\{ \frac{1}{\beta_x} \left[g^2 + \left(\beta_x g' - \frac{\beta'}{2} g \right)^2 \right] \right\} \dot{N} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{E^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}; \quad (24.43)$$

$$\frac{1}{\bar{A}_z^2} = \frac{d(\bar{A}_z^2)}{dt} = -2\alpha_z + \frac{1}{\bar{A}_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{8\gamma^2} \dot{N} \frac{\bar{\epsilon}^2}{E^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}. \quad (24.44)$$

В целях удобства при практическом использовании этих выражений следует ввести вместо амплитуды A , определение которой затруднено, максимальное отклонение частицы $y_{\text{макс}}(s)$, которое она может достигать в точке s во время бетатронных колебаний с амплитудой A . Из формул (24.1) и (24.4)

$$y_{\text{макс}}^2(s) = 4\beta(s) A^2. \quad (24.45)$$

24.3. Заключение

Уравнения изменения среднего квадрата амплитуды имеют вид

$$\frac{1}{\bar{A}_x^2} \cdot \frac{d(\bar{A}_x^2)}{dt} = -2\alpha_x + \frac{R_s^2}{4\bar{A}_x^2} \times \\ \times \frac{1}{\beta_x} \left[g^2 \left(\beta_x g' - \frac{\beta'}{2} g \right)^2 \right] \dot{N} \frac{\bar{\epsilon}^2}{E_s^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}$$

[см. уравнение (24.43)];

$$\frac{1}{\bar{A}_z^2} \cdot \frac{d(\bar{A}_z^2)}{dt} = -2\alpha_z + \frac{1}{\bar{A}_z^2} \cdot \frac{\beta_z}{8\gamma^2} \dot{N} \frac{\bar{\epsilon}^2}{E^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}$$

[см. уравнение (24.44)];

$$\frac{1}{(\Delta\hat{E})^2} \cdot \frac{d(\Delta\hat{E})^2}{dt} = -2\alpha_s + \frac{1}{(\Delta\hat{E})^2} \dot{N} \bar{\epsilon}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}$$

[см. формулу (24.37)].

Первые два уравнения можно написать относительно $y_{\text{макс}}(s)$, которое связано с A следующим образом:

$$A^2 = y_{\text{макс}}^2(s) / 4\beta(s)$$

[см. формулу (24.45)].

В сглаженном приближении имеем

$$\frac{1}{\bar{x}^2} \cdot \frac{d(\bar{x}^2)}{dt} = -2\alpha_x + \left(\frac{R_s \alpha}{E_s} \right)^2 \frac{1}{\bar{x}^2} \overline{N\epsilon^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt}$$

[см. формулу (23.49)];

$$\frac{1}{\bar{z}^2} \cdot \frac{d\bar{z}^2}{dt} = -2\alpha_z + \left(\frac{R_s}{v_z \gamma E_s} \right)^2 \frac{1}{2\bar{z}^2} \overline{N\epsilon^2} - \frac{1}{E_s} \cdot \frac{dE_s}{dt},$$

где $\overline{N\epsilon^2} = \left(\frac{\rho_s}{R_s} \right) (\overline{N\epsilon^2})_M$ [см. формулу (23.5)].

Показатели затухания амплитуды

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{2} \frac{\overline{P_{\gamma s}}}{E_s} J_x; \\ \alpha_z &= \frac{1}{\tau_z} = \frac{1}{2} \frac{\overline{P_{\gamma s}}}{E_s} J_z; \\ \alpha_s &= \frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{2} \frac{\overline{P_{\gamma s}}}{E_s} J_s. \end{aligned} \right\} \quad (24.46)$$

Значения факторов J_x, J_z, J_s для различных конфигураций магнитного поля представлены в табл. 5.

Таблица 5

Значения факторов затухания

Структура поля	J_x	J_z	J_s
Общий случай [см. формулы (24.27) и (24.33)]	$1 - R_s \frac{g(1-2n)K_s^3}{\overline{K_s^2}}$	1	$2 + R_s \frac{g(1-2n)K_s^3}{\overline{K_s^2}}$
Знакопеременный градиент	$1 + \left(\frac{R_s}{\rho_s}\right) [2(\overline{ng})_M - \overline{g}_M]$	1	$2 - \frac{R_s}{\rho_s} - [2(\overline{ng})_M - \overline{g}_M]$
Постоянный градиент	$\frac{n}{1-n}$	1	$\frac{3-4n}{1-n}$
Сглаженное приближение [поле с прямыми секциями, см. формулы (23.11), (23.24)]	$\alpha \frac{R_s}{\rho_s} - 1$	1	$4 - \alpha \frac{R_s}{\rho_s}$

Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} J_x + J_z + J_s &= 4; \\ J_x + J_s &= 3; \quad J_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (24.47)$$

и что для $n = \frac{1}{2}$ $J_x = J_z = 1, J_s = 2$ при любой структуре поля.

В этих формулах использованы обычные обозначения

$$\begin{aligned} g(s) &= \left(\frac{E}{R} \cdot \frac{dx}{dE} \right)_s; & \alpha &= \left(\frac{E}{R} \cdot \frac{dR}{dE} \right)_s; \\ K_s &= \frac{1}{\rho_s}; & n &= - \left(\frac{\rho}{B} \cdot \frac{dB}{dx} \right)_s. \end{aligned}$$

Индексы M и s указывают, что соответствующие величины относятся либо к одним магнитным секторам, либо к синхронной

орбите. Кроме того, с помощью формулы (20.43) находим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_z &= \frac{1}{2} \frac{\overline{P_{1s}}}{E_s} = 2,82 \cdot 10^{-7} \frac{\gamma^3}{\rho_z R_s} \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}; \\ \tau_z &= \frac{1}{\alpha_z} = 3,55 \cdot 10^6 \frac{\rho_s R_s}{\gamma^3} \text{ м}^{-2} \cdot \text{сек}, \end{aligned} \right\} \quad (24.48)$$

и, исходя из (22.24), имеем

$$\frac{N \overline{e^2}}{E^2} = 4,30 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{\gamma^5}{\rho^3} \text{ м}^3 \cdot \text{сек}^{-1}. \quad (24.49)$$

Глава 25

РАДИАЛЬНОЕ И АЗИМУТАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ В НАКОПИТЕЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ [44]

25.1. Предварительные допущения

Рассмотрим первоначально упрощенную структуру кольца, в котором движутся фиктивные неизлучающие частицы, совершающие синусоидальные бетатронные колебания

$$x = \hat{x} \cos \varphi_x, \quad (25.1)$$

где $\varphi_x = s/\lambda + \delta = \omega t + \delta$;

$$\frac{dx}{d\varphi_x} = x^* = -\hat{x} \sin \varphi_x.$$

Отклонение x отсчитывается от замкнутой реперной орбиты x_f , радиус которой пропорционален энергии частиц E . Смещение частицы dx_f/dE будем вначале считать не зависящим от ее азимута в кольце и равным некоторой постоянной

$$\frac{E}{R} \cdot \frac{dx_f}{dE} = g, \quad (25.2)$$

где R — средний радиус кольца.

Обобщение предположений (25.1) и (25.2) сделано в разд. 25.5.

Каждый электрон при движении в магнитном поле кольца спонтанно излучает световые кванты. Если электрон теряет энергию ε , реперная орбита сжимается, испытывая в силу формулы (25.2) изменение

$$\delta x_f = -Rg(\varepsilon/E) \quad \text{и} \quad \delta x_f^* = -Rg^*(\varepsilon/E) = 0.$$

Приращение для радиального бетатронного отклонения, которое отсчитывается от x_f , имеет противоположный знак

$$\delta x_e = +Rg\varepsilon/E; \quad \delta x_e^* = +Rg^*\varepsilon/E = 0. \quad (25.3)$$

25.2. Описание движения во вращающейся системе координат a_φ и a_q

Представим радиальные бетатронные колебания частицы в фазовой плоскости (x, x^*) (рис. 44). Пусть угол φ возрастает при вращении вектора x по часовой стрелке. Всякий раз при излучении частицей кванта ϵ к радиусу-вектору x добавляется малый вектор δx_ϵ , компоненты $(\delta x_\epsilon, \delta x_\epsilon^*)$ которого определены формулой (25.3). Радиус-вектор x равен сумме элементарных векторов δx_ϵ , вызван-

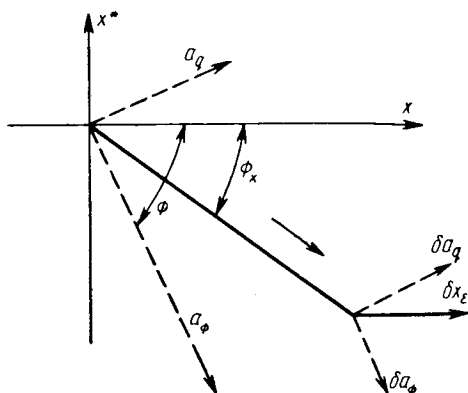


Рис. 44.

ных всеми актами излучения, происходящими во время движения частицы в кольце:

$$x = \sum \delta x_\epsilon. \quad (25.4)$$

Амплитуда \hat{x} бетатронных колебаний равна модулю этого радиус-вектора

$$\hat{x} = |x| = |\sum \delta x_\epsilon|. \quad (25.5)$$

Каждый из элементарных векторов δx_ϵ , которые составляют вектор x , с момента своего возникновения поворачивается в плоскости (x, x^*) так же, как и сам вектор x .

Чтобы провести сложение элементарных векторов δx_ϵ , разложим их на компоненты во вращающейся системе координат, в которой эти элементарные векторы неподвижны. Пусть a_φ и a_q — оси этой вращающейся системы координат (см. рис. 44). Ось a_φ перемещается по часовой стрелке и образует с осью x угол φ такой, что

$$\varphi = s/\lambda + \delta_0 = \omega t + \delta_0, \quad (25.6a)$$

где δ_0 — произвольная постоянная. Ось a_q перпендикулярна к оси a_φ .

Предположим, что в момент t_i частица испускает квант ϵ_i и что положение оси a_φ относительно фиксированной системы координат

в этот момент характеризуется углом φ_i . Компоненты соответствующего элементарного вектора δx_ϵ во вращающейся системе

$$\left. \begin{aligned} (\delta a_\varphi)_i &= (\delta x_\epsilon)_i \cos \varphi_i = \frac{R}{E} g e_i \cos \varphi_i; \\ (\delta a_q)_i &= (\delta x_\epsilon)_i \sin \varphi_i = \frac{R}{E} g e_i \sin \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (25.66)$$

Во вращающейся системе координат эти компоненты неподвижны. Проводя алгебраическое сложение всех $(\delta a_\varphi)_i$ или всех $(\delta a_q)_i$, получим соответственно компоненты a_φ и a_q вектора x во вращающейся системе координат:

$$x = \left\{ \begin{aligned} a_\varphi &= \sum_i (\delta a_\varphi)_i; \\ a_q &= \sum_i (\delta a_q)_i. \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

Амплитуда этого вектора

$$\hat{x} = |x| = \sqrt{(a_\varphi^2 + a_q^2)}. \quad (25.8)$$

25.3. Затухание колебаний

В соответствии с формулами (23.38), (23.46) каждое испускание кванта частицей приводит к добавлению к вектору x , соответствующему данной частице, элементарного вектора δx_ϵ и, кроме того, все эти элементарные векторы испытывают затухание.

Если рассматривать затухающее движение вектора x с некоторого момента t_0 , не принимая во внимание элементарные векторы δx_ϵ , возникающие позже t_0 , то изменение вектора x в среднем определяется формулой

$$x(t) = \left\{ \begin{aligned} x &= \hat{x}_0 e^{-(t-t_0)/\tau_x} \cos \varphi_x, \\ x^* &\approx -\hat{x}_0 e^{-(t-t_0)/\tau_x} \sin \varphi_x, \end{aligned} \right. \quad (25.9)$$

где τ_x — характерное время затухания амплитуды радиальных бетатронных колебаний. Фаза определяется соотношением $\operatorname{tg} \varphi_x = -x^*/x$ и меняется со временем примерно по линейному закону.

Затухающее движение частицы удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению. Поэтому можно разложить вектор x на его составляющие и написать уравнение изменения отдельно для каждой компоненты.

Таким образом, закон затухания для вектора x (25.9) можно формально отнести к его элементарным компонентам δa_φ и δa_q ,

возникшим в момент t_i :

$$\left. \begin{aligned} (\delta a_\varphi)_i &= \frac{R}{E} g \varepsilon_i \cos \varphi_i e^{-(t-t_i)/\tau_x}, \\ (\delta a_q)_i &= \frac{R}{E} g \varepsilon_i \sin \varphi_i e^{-(t-t_i)/\tau_x}. \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

В соответствии с системой (25.7) вектор x в момент t раскладывается на такие элементарные компоненты.

25.4. Статистические значения компонент векторов a_φ и a_q

Центральная предельная теорема (см. гл. 14), относящаяся к статистическому распределению суммы случайных величин, гласит: если слагаемые δa_i суммы a являются случайными и независимыми величинами и все характеризуются одним и тем же распределением вероятности и если, кроме того, их общий средний квадрат $(\overline{\delta a})^2$ есть конечная величина, то распределение вероятности a является гауссовским. Покажем применимость этой теоремы для сумм

$$a_\varphi = \sum_i (\delta a_\varphi)_i; \quad a_q = \sum_i (\delta a_q)_i,$$

являющихся компонентами вектора x .

Согласно уравнениям (25.10) элементы $(\delta a_\varphi)_i$ и $(\delta a_q)_i$ — произведения кванта энергии ε_i , излученного в момент t_i , на определенную функцию от t_i . Опуская индексы φ и q , представим эти элементы в виде $\delta a_i = \varepsilon_i f(t_i)$.

Ранее было показано [см., например, (22.19)], что вероятность излучения кванта ε_i есть функция энергии частицы E и локального магнитного радиуса ρ . Энергия испытывает случайные изменения во время излучения каждого кванта. Но в среднем в процессе бетатронных и синхротронных колебаний частицы E и ρ осциллируют около средних синхронных значений E_s и ρ_s с очень малыми амплитудами для большинства электронов. Будем пренебрегать этими осцилляциями, полагая вероятность излучения кванта ε

$$p(\varepsilon, E, \rho) d\varepsilon dt = p(\varepsilon, E_s, \rho_s) d\varepsilon dt = p(\varepsilon) d\varepsilon dt. \quad (25.11)$$

В этом приближении ε является независимой случайной переменной.

Величина кванта ε_i и момент его излучения t_i не связаны каким-либо соотношением. Поэтому элементы δa_i можно рассматривать как независимые случайные переменные с одним и тем же распределением вероятности и одинаковым для всех элементов среднеквадратичным значением

$$\overline{(\delta a)^2} = \overline{\varepsilon^2} \overline{f^2}(t). \quad (25.12)$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений компоненты a_φ и a_q , равные сумме элементов δa_i , удовлетворяют требованиям центральной предельной теоремы и, следовательно, их распределение вероятности можно считать гауссовским.

Согласно формулам (25.10) и (25.12),

$$\begin{aligned} \overline{(\delta a)^2} &= \frac{R^2 g^2}{E^2} \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi e^{-2(t-t_i)/\tau_x}; \\ &\frac{R^2 g^2}{E^2} \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \cdot e^{-2(t-t_i)/\tau_x}. \end{aligned} \quad (25.13)$$

Усредним по промежутку времени от $-\infty$ до t . Предполагаем, что все моменты t_i и все бетатронные фазы φ_i равновероятны и что все фазы равновероятны для всякого момента t_i . Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2 \varphi e^{-2(t-t_i)/\tau_x}} &= \sin^2 \varphi \cdot e^{-2(t-t_i)/\tau_x} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\dot{N}}{N} \int_{-\infty}^t e^{-2(t-t_i)/\tau_x} dt_i = \frac{\dot{N}}{N} \cdot \frac{\tau_x}{4}. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Аналогичное значение получим для $(\delta a_\varphi)^2$, заменив $\sin \varphi$ на $\cos \varphi$. Дисперсия компонент a_φ и a_q $\sigma_a^2 = \overline{a^2} - (\overline{a})^2$. Учитывая, что при сделанных предположениях $\overline{a} = \sum_i \delta a_i = 0$,

$$\sigma_a^2 = \overline{a^2} \left(\sum_{i=1}^N \delta a_i \right)^2 = N \overline{(\delta a)^2}. \quad (25.15)$$

Принимая во внимание формулы (25.13) и (25.14), окончательно получаем для дисперсии компонент a_φ и a_q одно и то же выражение

$$\sigma_a^2 = \overline{a^2} = N \overline{(\delta a)^2} = \frac{1}{4} \frac{R^2 g^2}{E^2} \dot{N} \varepsilon^2 \tau_x. \quad (25.16)$$

25.5. Произвольная магнитная структура

Магнитная структура накопительного кольца часто бывает столь сложной и запутанной, что допущения (25.1) и (25.2) не выполняются. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты, характеризующие структуру кольца, т. е. коэффициент Твисса β и коэффициент дисперсии импульса g , определенный формулой (25.2), являются функциями азимута:

$$\beta = \beta(s); \quad g = g(s). \quad (25.17)$$

При этом условии уравнение траектории определяется формулой (7.22)

$$x = A\beta^{1/2} \cos \int_0^s \frac{ds}{\beta}. \quad (25.18)$$

По аналогии с формулой (11.2) введем функцию η и независимую переменную ψ :

$$\eta = \beta^{-1/2} x, \quad \psi = \int_0^s \frac{ds}{\beta}, \quad (25.19)$$

с помощью которых уравнение траектории в фазовом пространстве η, η^* запишется в виде

$$\eta = \hat{\eta} \cos \psi; \quad \eta^* \equiv \frac{d\eta}{d\psi} = -\hat{\eta} \sin \psi. \quad (25.20)$$

Используя обозначения $\beta' = d\beta/ds$ и $x' = dx/ds$, перепишем η^* в виде

$$\eta^* = \frac{d\eta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = -\frac{1}{2} \beta^{-1/2} \beta' x + \beta^{1/2} x'. \quad (25.21)$$

Поскольку траектория, определяемая формулой (25.20), чисто синусоидальная, проблема в координатах η, η^* аналогична рассмотренной ранее для случая постоянного g и сводится к предыдущему разложению.

Излучение кванта ε вызывает изменение координат x, x' траектории в фазовом пространстве на величины $\delta x = \frac{R}{E} g \varepsilon$; $\delta x' = -\frac{R}{E} g' \varepsilon$ и новых координат η, η^* на величины

$$\left. \begin{aligned} \delta \eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta x = \beta^{-1/2} g \frac{R}{E} \varepsilon; \\ \delta \eta^* &= \frac{\partial \eta^*}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \eta^*}{\partial x'} \delta x' = \left(\beta^{1/2} g' - \frac{1}{2} \beta^{-1/2} \beta' g \right) \frac{R}{E} \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (25.22)$$

В плоскости (η, η^*) фазовая траектория представляет собой окружность. Излучение кванта приводит к изменению вектора $\eta(\eta, \eta^*)$ на элементарный вектор $\delta \eta^*$ с компонентами $\delta \eta, \delta \eta^*$ в фиксированной системе отсчета (η, η^*) ; во вращающейся системе (b_φ, b_q) компоненты $\delta b_\varphi, \delta b_q$ вектора $\delta \eta^*$ выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} \delta b_\varphi &= \delta \eta \cos \psi - \delta \eta^* \sin \psi; \\ \delta b_q &= \delta \eta \sin \psi + \delta \eta^* \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (25.23)$$

Аналогично предыдущему случаю [см. формулы (25.7), (25.8)] вектор η , характеризующий состояние частицы, во вращающейся системе координат имеет компоненты b_φ, b_q :

$$\eta = \begin{cases} b_\varphi = \sum_i (\delta b_\varphi)_i; \\ b_q = \sum_i (\delta b_q)_i, \end{cases} \quad (25.24)$$

соответственно модуль вектора

$$b = \sqrt{b_\varphi^2 + b_q^2}. \quad (25.25)$$

Элементарные векторы δb_φ и δb_q также являются случайными и независимыми, откуда следует, что соответствующие им суммы b_φ^- и b_q^- обладают гауссовским распределением со среднеквадратичным значением

$$\bar{b}^2 = \sigma_b^2 = N \overline{(\delta b)^2}. \quad (25.26)$$

Эти суммы обозначим g и β ; подставляя уравнения (25.22), (25.23), учитываем затухание

$$(\delta b_\varphi)_i = \frac{R}{E} \left(g \cos \psi_i + \frac{1}{2} \beta' g \sin \psi_i - \beta g' \sin \psi_i \right) \times \\ \times \beta^{-1/2} \varepsilon_i e^{-(t-t_i)/\tau_x}$$

и аналогичное выражение для $(\delta b_q)_i$

$$(\delta b_q)_i^2 = \frac{R^2}{E^2} \left[g^2 \cos^2 \psi_i + \left(\frac{1}{2} \beta' - \beta g' \right)^2 \sin^2 \psi_i + \right. \\ \left. + (\beta' g^2 - 2\beta g g') \sin \psi_i \cos \psi_i \right] \beta^{-1} \varepsilon_i^2 e^{-2(t-t_i)/\tau_x}.$$

Величины β , g и их производные, так же как вероятность $p(\varepsilon)$, являются функциями положения частиц s на орбите в кольце.

Найдем первоначально средний квадрат $[\overline{\delta b_\varphi(s)}]^2$ по всем актам излучения в определенной точке s . Все бетатронные фазы ψ_i и все моменты излучения t_i равновероятны и не зависят один от другого. Учитывая формулу (25.14) для среднего значения экспоненциального множителя, получаем

$$\overline{(\delta b_\varphi^*(s))^2} = \frac{\tau_x}{4} \cdot \frac{R^2}{E^2} G^2(s) \bar{\varepsilon}^2(s) \frac{\dot{N}(s)}{N_1(s)}, \quad (25.27)$$

где

$$G^2(s) = \left\{ g^2(s) + \left[\frac{1}{2} \beta'(s) g(s) - \beta(s) g'(s) \right]^2 \right\} \beta^{-1}(s); \quad (25.28)$$

$\dot{N}(s)$ — частота излучений квантов в точке s ; $N_1(s)$ — полное число излучений некоего фиктивного электрона, находящегося постоянно при условиях, имеющих в точке s .

Для $[\overline{\delta b_q(s)}]^2$ получим аналогичное выражение. В дальнейшем будем опускать индексы φ и q .

В среднем за один оборот получаем

$$N \overline{(\delta b)^2} = \frac{\tau_x}{4} \cdot \frac{R^2}{E^2} G(s) \dot{N}(s) \bar{\varepsilon}^2(s) = \bar{b}^2 = \sigma_b^2 \quad (25.29)$$

одно и то же выражение для обеих компонент b_φ и b_ϱ вектора η .

Согласно выражениям (22.24) и (22.26) имеем

$$\dot{N}(s) \bar{\varepsilon}^2(s) = 2C_\gamma \gamma^2 E \bar{P}_\gamma K^3(s) / \bar{K}^2, \quad (25.30)$$

где $K(s) = 1/\rho(s)$ — кривизна реперной орбиты; \bar{P}_γ — мощность излучения, усредненная по одному обороту электрона;

$$C_\gamma = 55 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-1/2} \hbar / m_0 c = 3,84 \cdot 10^{-13} \text{ м}, \quad (25.31)$$

кроме того,

$$\tau_x = \tau_z / J_x \quad (25.32)$$

и согласно (24.46)

$$\tau_z = 2E / \bar{P}_\gamma. \quad (25.33)$$

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\sigma_b^2 = \frac{C_\gamma \gamma^2 R^2}{\bar{K}^2 J_x} \left\{ \left[g^2 + \left(\frac{1}{2} \beta' g - \beta g' \right)^2 \right] \beta^{-1} K^3 \right\}. \quad (25.34)$$

Эту формулу можно конкретизировать для наиболее распространенной структуры кольца с изомагнитными орбитами. Такая структура состоит из магнитных секторов с постоянной кривизной $K = 1/\rho = \text{const}$ и прямолинейных участков, длина которых характеризуется коэффициентом $1+k = R/\rho$. Прямолинейные участки могут содержать квадрупольные линзы.

Легко убедиться, что для такой структуры из формулы (25.34) получим

$$\sigma_b^2 = C_\gamma \gamma^2 \frac{R(1+k)}{J_x} \left\{ \left[g^2 + \left(\frac{1}{2} \beta' g - \beta g' \right)^2 \right] \beta^{-1} \right\}_M, \quad (25.35)$$

где индекс M указывает на то, что усреднение проводится только по участку орбиты внутри магнитного сектора. Кроме того, для такой структуры в соответствии с формулой (24.27) и табл. 5 имеем

$$J_x = 1 + (1+k) [2(\bar{ng})_M - \bar{g}_M] = n/(1-n). \quad (25.36)$$

Это равенство справедливо для слабой фокусировки с показателем спада n .

25.6. Распределение отклонений бетатронных колебаний

Зная закон распределения параметров b_φ и b_ϱ , найдем законы распределения других величин, характеризующих радиальные бетатронные колебания. Дисперсию этих величин будем выражать всегда через дисперсию σ_b , определенную в предыдущем разделе.

Отклонение η и его производная η^* являются компонентами вектора η в фиксированной системе координат, подобно тому как

b_φ и b_q — компоненты того же вектора во вращающейся системе координат, расположенной в той же плоскости. Из этого следует, что η и η^* обладают распределением, идентичным с распределением величин b_φ и b_q , т. е. гауссовским распределением с дисперсией

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_{\eta^*}^2 = \sigma_b^2. \quad (25.37)$$

Это распределение имеет вид

$$\rho(\eta, \eta^*) = \frac{1}{2\pi\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{\eta^2 + \eta^{*2}}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (25.38)$$

Интегрируя это выражение в плоскости η, η^* по кольцу, радиусы которого заключены между $\hat{\eta}$ и $(\hat{\eta} + d\hat{\eta})$, найдем распределение амплитуды $\hat{\eta}$:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{d\hat{\eta}} d\eta d\eta^* &= 2\pi\hat{\eta}d\hat{\eta}; \\ \rho(\hat{\eta}) d\hat{\eta} &= \frac{2\hat{\eta}}{\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{\hat{\eta}^2}{\sigma_\eta^2}\right) d\hat{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (25.39)$$

Это распределение Релея с дисперсией $\sigma_{\hat{\eta}}^2 = \sqrt{2}\sigma_b$.

Инвариант Куранта—Снайдера, или энергия колебания

$$C = \beta^{-1} \left[x^2 + \left(-\frac{1}{2} \beta' x + \beta x' \right)^2 \right] = \eta^2 + \eta^{*2} = \hat{\eta}^2. \quad (25.40)$$

Исходя из соотношений (25.39), найдем ее распределение

$$\rho(C) dC = \frac{1}{C} e^{-C/\bar{C}} dC; \quad \bar{C} = 2\sigma_b^2. \quad (25.41)$$

Это распределение Максвелла — Больцмана с температурой $kT = \frac{1}{2} m_0 \gamma c^2 \bar{C} / \beta$ в лабораторной системе координат или температурой $T^* = \gamma T$ в собственной системе.

Из гауссовского распределения отклонений η [см. формулу (25.37)] выводим с помощью (25.19) распределение для радиальных бетатронных отклонений x , которое является также гауссовским со стандартным отклонением

$$\sigma_{x\beta}(s) = \beta^{1/2}(s) \sigma_b. \quad (25.42)$$

Для нахождения распределения производной $x' = dx/ds$ исходим из распределения плотности частиц в плоскости x, x' , которое равно

$$\rho(x, x') = \rho(\eta, \eta^*) \frac{\partial(\eta, \eta^*)}{\partial(x, x')}.$$

Элементы якобиана выводятся из системы уравнений (25.19) и (25.21). Получается $\partial(\eta, \eta^*)/\partial(x, x') = 1$. Отсюда, вводя перемен-

ные x, x' в (25.38), получаем

$$p(x, x') dx dx' = \frac{1}{2\pi\sigma_b^2} \exp \left\{ -\frac{\beta^{-1} \left[x^2 + \left(-\frac{1}{2} \beta' x + \beta x' \right)^2 \right]}{2\sigma_b^2} \right\} dx dx'.$$

Для определенной точки x это распределение x' является гауссовским со средним значением $\bar{x}' = \frac{\beta'}{2\beta} x$ и стандартным отклонением

$$\sigma_{x'} = \beta^{-1/2} \sigma_b. \quad (25.43)$$

Интегрируя по x , получим распределение x' для ансамбля частиц в данном сечении пучка. Это распределение оказывается симметричным гауссовским распределением с дисперсией $\sigma_{x'}^2$:

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4} \beta'^2}{\beta}} \sigma_b. \quad (25.44)$$

25.7. Распределение отклонений синхротронных колебаний

Отклонение энергии частицы по отношению к энергии синхронной частицы $\Delta E = E - E_s$ осциллирует по закону

$$\begin{aligned} \Delta E &= \widehat{\Delta E} \cos \varphi; \\ \frac{d}{d\varphi} (\Delta E) &= (\Delta E)^* = -\widehat{\Delta E} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (25.45)$$

где фаза $\varphi = \Omega t + \delta$.

Угловая частота синхротронных колебаний

$$\Omega = \frac{c}{R} \sqrt{\frac{h_{\text{ВЧ}} \alpha e \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s}{2\pi E}}, \quad (25.46)$$

причем

$$(\Delta E)^* = \frac{\Omega_s E_s}{\alpha c} y, \quad (25.47)$$

где $y = s - s_s$ — отклонение частицы по азимуту по отношению к синхронной частице. Амплитуды всех этих величин убывают экспоненциально с постоянной времени τ_s . При излучении кванта ϵ величины ΔE и $(\Delta E)^*$ меняются на

$$\delta (\Delta E) = -\epsilon; \quad \delta (\Delta E)^* = 0. \quad (25.48)$$

По аналогии с бетатронными колебаниями заключаем, что переменные ΔE , ΔE^* и y обладают гауссовским распределением со среднеквадратичным значением

$$\overline{(\Delta E)^2} = \frac{1}{4} \overline{N(s) \varepsilon^2(s)} \tau_s, \quad (25.49)$$

которое получается из выражений (25.48) так же, как дисперсия отклонений для бетатронных колебаний $\sigma_x = \sigma_a$ [см. формулу (25.16)] следует из выражения (25.3). Запишем

$$\tau_s = \tau_z / J_s. \quad (25.50)$$

Учитывая формулы (25.30) и (25.33), получим

$$\overline{(\Delta E/E)^2} = C_1 \gamma^2 \overline{K^3} / J_s \overline{K^2} \quad (25.51)$$

и для структуры с изомагнитными орбитами

$$\overline{(\Delta E/E)^2} = C_1 \gamma^2 / \rho_s^2, \quad (25.52)$$

где

$$J_s = 2 - (1+k) [2(\overline{ng})_M - \overline{g}_M] = (3-4n)/(1-n) \quad (25.53)$$

(последнее равенство справедливо для слабой фокусировки). Кроме того, $\overline{(\Delta E^*)^2} = \overline{(\Delta E)^2}$ и в силу соотношения (25.47)

$$\overline{y^2} = \left(\frac{\alpha c}{\Omega_s} \right)^2 \overline{\left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2} \quad (25.54)$$

или, подставляя выражение Ω_s по формуле (25.46), найдем

$$\overline{\left(\frac{y}{R} \right)^2} = \frac{2\pi\alpha E}{h_{\text{ВЧ}} e \hat{V}_{\text{ВЧ}} \cos \varphi_s} \overline{\left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2}.$$

Поперечное отклонение от реперной орбиты, согласно (25.2) и (25.17),

$$x_s = \frac{R}{E} g(s) \Delta E. \quad (25.55)$$

Распределение x_s также является гауссовским, причем

$$\overline{(x_s/R)^2} = g^2(s) \overline{(\Delta E/E)^2}. \quad (25.56)$$

Наконец, легко показать, что частицы, обладающие гауссовским распределением для отклонений бетатронных и синхротронных колебаний с дисперсиями $\sigma_{x\beta}$ и σ_{xs} , обладают также гауссовским распределением плотности в зависимости от радиуса с дисперсией

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x\beta}^2 + \sigma_{xs}^2. \quad (25.57)$$

Глава 26

КВАНТОВЫЕ ПОТЕРИ

(изложение в рамках гладкого приближения)

26.1. Уравнение Фоккера—Планка

Рассмотрим потери электронов, для которых нарушаются условия устойчивого движения в результате излучения ими фотонов.

Уравнение колебательного движения электрона для любой из трех мод имеет вид

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \omega^2 x = f(t), \quad (26.1)$$

где $f(t)$ — центрированная случайная функция. Введем независимые переменные $u = y$ и y , с помощью которых приведем уравнение (26.1) к системе двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -(\beta u + \omega^2 y) + \varphi(t); \\ \dot{y} &= u + \psi(t), \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

где φ и ψ — центрированные случайные функции. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\varphi} &= \overline{\psi} = 0; \\ \overline{\Delta u} &= -(\beta u + \omega^2 y) \Delta t; \\ \overline{\Delta y} &= u \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (26.3)$$

Функции φ и ψ описывают ряд случайных внезапных изменений δu и δy , которые испытывает электрон с частотой N_u или N_y . Эти флуктуации характеризуют величинами q , h и η , определенными следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \frac{(\overline{\Delta u})^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \overline{N_u (\delta u)^2}; \\ h &= \frac{1}{2} \frac{(\overline{\Delta y})^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \overline{N_y (\delta y)^2}; \\ \eta &= q + \omega^2 h. \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

Исходя из результатов, полученных в гл. 23 и 24 [см. формулы (23.34) и (23.35)] для трех мод колебаний по x -, z - и ΔE -направлениям в результате излучения фотона, получим

$$\left. \begin{aligned} q_x &= 0; & h_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{R_x}{E} \right)^2 \overline{N \epsilon^2} = \frac{\eta_x}{\omega_x^2}; \\ q_z &= \frac{1}{2} \overline{N \epsilon^2 \varphi_z^2} = \eta_z; & h_z &= 0; \\ q_E &= 0; & h_E &= \frac{1}{2} \overline{N \epsilon^2} = \frac{\eta_s}{\Omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26.5)$$

Введем плотность вероятности $W(y, u, t)$ нахождения частицы в точке (y, u) фазовой плоскости. В момент $t + \Delta t$ она выражается через плотность вероятности в момент t следующим образом:

$$W(y, u, t + \Delta t) = \iint W(y - \Delta y, u - \Delta u, t) \times \\ \times Q(y - \Delta y, u - \Delta u, \Delta y, \Delta u) d\Delta y d\Delta u, \quad (26.6)$$

где $Q d\Delta y d\Delta u$ — вероятность того, что частица, находящаяся в момент t в точке $(y - \Delta y, u - \Delta u)$, будет находиться в момент $(t + \Delta t)$ между y и $(y + d\Delta y)$ и соответственно между u и $(u + d\Delta u)$.

Разложим подынтегральное выражение (26.6) в ряд до членов второго порядка по Δy и Δu для того, чтобы учесть флуктуации, характеризующиеся уравнениями (26.4). Вводя обозначения

$W_0 = W(y, u, t)$ и $Q_0 = Q(y, u, \Delta y, \Delta u)$, получим

$$WQ = W_0 Q_0 - \left[\frac{\partial}{\partial y} (W_0 Q_0) \right] \Delta y - \left[\frac{\partial}{\partial u} (W_0 Q_0) \right] \Delta u + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (W_0 Q_0) \right] (\Delta y)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} (W_0 Q_0) \right] (\Delta u)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial u} (W_0 Q_0) \right] \Delta y \Delta u.$$

Проинтегрируем отдельно каждое слагаемое:

$$\iint W_0 Q_0 d\Delta y d\Delta u = W_0 \iint Q_0 d\Delta y d\Delta u = W_0; \\ - \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} (W_0 Q_0) \right] \Delta y d\Delta y d\Delta u = - \frac{\partial}{\partial y} \left[W_0 \iint Q_0 \Delta y d\Delta y d\Delta u \right] = \\ = - \frac{\partial}{\partial y} (W_0 \overline{\Delta y}) = - u \Delta t \frac{\partial W_0}{\partial y}; \\ - \iint \left[\frac{\partial}{\partial u} (W_0 Q_0) \right] \Delta u d\Delta y d\Delta u = - \frac{\partial}{\partial u} (W_0 \overline{\Delta u}) = \\ = \Delta t \frac{\partial}{\partial u} [W_0 (\beta u + \omega^2 y)] = \Delta t \left[\beta \left(W_0 + u \frac{\partial W_0}{\partial u} \right) + \omega^2 y \frac{\partial W_0}{\partial u} \right]; \\ \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (W_0 Q_0) \right] (\Delta y)^2 d\Delta y d\Delta u = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [W_0 (\overline{\Delta y})^2] = h \Delta t \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}; \\ \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} (W_0 Q_0) \right] (\Delta u)^2 d\Delta y d\Delta u = q \Delta t \frac{\partial^2 W_0}{\partial u^2}; \\ \frac{1}{2} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial u} (W_0 Q_0) \right] \Delta y \Delta u d\Delta y d\Delta u = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial u} (W_0 \overline{\Delta y \Delta u}) \approx 0$$

(последним членом пренебрежем, поскольку он порядка $(\Delta t)^2$). Разложим также левую часть выражения (26.6) в ряд по Δt , ограничив-

шись двумя членами:

$$W(x, u, t + \Delta t) = W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial t} \Delta t.$$

Учитывая это разложение и выражения, полученные в результате интегрирования, найдем, что уравнение (26.6) принимает форму уравнения диффузии Фоккера — Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial y} - \omega^2 y \frac{\partial W}{\partial u} = \beta \left(W + u \frac{\partial W}{\partial u} \right) + h \frac{\partial^2}{\partial y^2} W + q^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} W. \quad (26.7)$$

26.2. Распределение энергии колебаний

Введем энергию колебания

$$H = \frac{1}{2} (u^2 + \omega^2 y^2). \quad (26.8)$$

Будем рассматривать только случай слабого возмущения колебаний в результате затухания или флуктуаций, в частности

$$\beta \ll \omega. \quad (26.9)$$

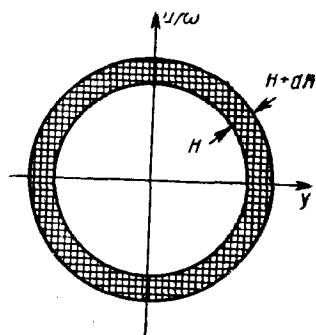


Рис. 45.

При этом условии траектория частицы в фазовой плоскости $(y, u/\omega)$ практически представляется кругом, которому соответствует определенная энергия колебания H (рис. 45). Кроме того, имеем

$$\left. \begin{aligned} H = \bar{u}^2 = \omega^2 \bar{y}^2 = \frac{1}{2} \hat{y}^2; \\ \frac{\partial H}{\partial u} = u; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \omega^2 y. \end{aligned} \right\} \quad (26.10)$$

Для определения потери частиц, достигающих границы области устойчивости, характеризуемой амплитудой \hat{y}_l или энергией H_l , представляет интерес распределение величин y или H , а не распределение фаз колебаний.

Исключим из уравнения (26.7) y и u , выразив их через H , и усредним это уравнение по кольцевой области в фазовой плоскости шириной dH , внутри которой $H \approx \text{const}$. Согласно уравнениям (26.10)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} = u \frac{\partial}{\partial H}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \omega^2 y \frac{\partial}{\partial H}; \\ u \frac{\partial W}{\partial y} - \omega^2 y \frac{\partial W}{\partial u} \equiv 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u \frac{\partial W}{\partial u} &= u^2 \frac{\partial W}{\partial H}; & \overline{u \frac{\partial W}{\partial u}} &= \overline{u^2} \frac{\partial W}{\partial H} = H \frac{\partial W}{\partial H}; \\
 \frac{\partial^2}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial H} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial H^2}; & \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \omega^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} + \omega^2 y^2 \frac{\partial^2}{\partial H^2} \right); \\
 \overline{\frac{\partial^2}{\partial u^2}} &= \frac{\partial}{\partial H} + H \frac{\partial^2}{\partial H^2}; \\
 \overline{\frac{\partial^2}{\partial y^2}} &= \omega^2 \left[\frac{\partial}{\partial H} + H \frac{\partial^2}{\partial H^2} \right],
 \end{aligned} \right\} (26.11)$$

Введя полученные выражения в уравнение (26.7), усредненные по области $H = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial W(H, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial H} H \left[\beta W + \eta \frac{\partial W}{\partial H} \right]. \quad (26.12)$$

26.3. Поток вероятности

Уравнение (26.12) аналогично уравнению непрерывности в гидродинамике для среды с плотностью $\rho(s, t)$, движущейся вдоль абсциссы s со скоростью $v(s, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial s} (\rho v) = - \frac{\partial}{\partial s} \psi, \quad (26.13)$$

где $\psi(s, t)$ — поток среды в точке s .

Уравнение непрерывности выражает закон сохранения материи $\int \rho ds = \text{const}$. Следовательно, по аналогии $\int W dH = 1 = \text{const}$. Сравнивая уравнения (26.12) и (26.13), приходим к заключению, что поток вероятности энергии колебаний вдоль абсциссы H

$$\psi(H, t) = -H \left(\beta W + \eta \frac{\partial W}{\partial H} \right). \quad (26.14)$$

Для стационарного распределения $\psi \equiv 0$ и

$$W_{st} = - \frac{\eta}{\beta} \frac{\partial W_{st}}{\partial H}.$$

Интегрируя, получим

$$W_{st} = \frac{1}{\bar{H}} e^{-\frac{H}{\bar{H}}}; \quad \bar{H} = \eta/\beta. \quad (26.15)$$

Это распределение энергии Максвелла — Больцмана для температуры T , измеренной в лабораторной системе координат,

$$\left. \begin{aligned}
 kT &= \frac{1}{2} m \overline{u^2} = \frac{1}{2} m_0 \gamma \bar{H}. \\
 T^* &= \gamma T.
 \end{aligned} \right\} (26.16)$$

В системе координат, связанной с пучком,

Квантовая продолжительность жизни τ_q частицы в пучке определяется потоком ψ_l плотности вероятности пересечения границы устойчивой области H_l :

$$\psi_l = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{\tau_q}. \quad (26.17)$$

Чтобы получить выражение для ψ_l , запишем уравнение (26.14) в виде

$$\psi = -H\eta e^{-\frac{H}{\eta/\beta}} \frac{\partial}{\partial H} \left[W e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} \right],$$

откуда имеем

$$\int_0^{H_l} \frac{\psi}{H\eta} e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} dH = - \left[W e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} \right]_0^{H_l}. \quad (26.18)$$

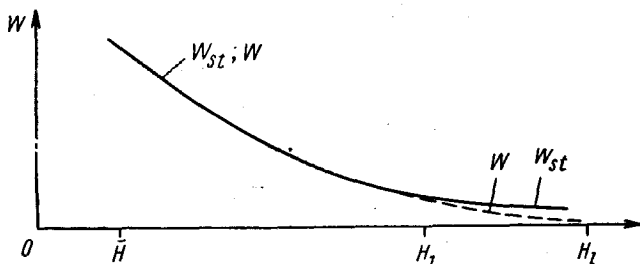


Рис. 46.

Предположим, что $H_l \gg \bar{H}$, и введем $H_1 \leq H_l$ (рис. 46). В области $0 < H < H_1$ распределение очень мало возмущено наличием границы устойчивости и

$$W(0) = W_{st}(0); \quad \left(W e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} \right)_{H=0} = \frac{1}{H}$$

[см. (26.15)].

Напротив, при $H > H_1$ $W(H) \ll W_{st}(H)$;

$$\left(W e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} \right)_{H=H_1} \ll \frac{1}{H}.$$

Таким образом, в правой части уравнения (26.18) имеем

$$- \left[W e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} \right]_0^{H_l} \approx \frac{1}{H}. \quad (26.19)$$

Что касается левой части уравнения (26.18), то в области $0 < H < H_1$ распределение стационарно при $\psi \equiv 0$. Следовательно,

$$\int_0^{H_1} \dots dH \approx \int_{H_1}^{H_1} \dots dH. \text{ В области } H_1 < H \leq H_1 \text{ имеем приближенно}$$

$$\psi/H\eta \approx \psi_1/H_1\eta \text{ и}$$

$$\int_0^{H_1} \dots dH \approx \frac{\psi_1}{H_1\eta} \int_{H_1}^{H_1} e^{+\frac{H}{\eta/\beta}} dH = \frac{\psi_1}{H_1\beta} \left[e^{\frac{H}{\eta/\beta}} \right]_{H_1}^{H_1} \approx \frac{\psi_1}{H_1\beta} \exp \frac{H_1}{\eta/\beta}, \quad (26.20)$$

так как экспонента значительно больше для H_1 , чем для H_1 . Приравнявая уравнения (26.19) и (26.20) и учитывая, что $\eta/\beta = \bar{H}$, получим

$$\psi_1 = \beta \frac{H_1}{\bar{H}} e^{-\frac{H_1}{\bar{H}}}. \quad (26.21)$$

Принимая во внимание, что, согласно уравнениям (26.10), (26.17), $H = \frac{1}{2} \hat{y}^2$ и $\psi_1 = 1/\tau_q$, можно выразить постоянную времени τ_q , характеризующую квантовые потери частиц, следующим образом:

$$\frac{1}{\tau_q} = \beta r e^{-r}, \quad (26.22)$$

где $r = \hat{y}_1^2/\bar{y}^2$. Напомним, что \bar{y}^2 и \hat{y}_1^2 обозначают соответственно средний квадрат амплитуды и квадрат предельной амплитуды, β — коэффициент затухания квадрата амплитуды, определенный формулой (24.46), в которой следует положить $\beta = 2\alpha_i$. Колебания предполагаются гармоническими, что не уменьшает общности при рассмотрении бетатронных колебаний, однако этого нельзя сказать для случая синхротронных колебаний. Частота этих колебаний Ω , стремящаяся к нулю на границе устойчивости [см. формулу (16.34) и рис. 37], не удовлетворяет более условию (26.9). Можно полагать, что факт $\Omega_i \rightarrow 0$ облегчает потери частиц, так как частицы, энергия которых превысила некоторую энергию, меньшую H_1 , но близкую к ней, уже более не возвращаются в состояние устойчивого движения. Однако синхротронные колебания являются приближенно гармоническими вплоть до энергий, очень близких к H_1 . Понятно, что при этих условиях можно использовать формулу (26.22) также для синхротронных колебаний.

Часть шестая

ПУЧКИ БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Глава 27

ОГРАНИЧЕНИЕ ПЛОТНОСТИ, ВЫЗВАННОЕ ПОПЕРЕЧНЫМ КУЛОНОВСКИМ РАСТАЛКИВАНИЕМ

Постановка задачи. Предполагается, что сечение пучка имеет форму круга и что плотность частиц постоянная как по сечению, так и по азимуту. Предполагается также, что в отсутствие пространственного заряда уравнение траектории имеет вид

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + Kr = 0, \quad (27.1)$$

где r — расстояние от центральной орбиты, а величина

$$K = \text{const} = \left(\frac{v}{R} \right)^2 \quad (27.2)$$

характеризует фокусирующую силу внешнего поля. Пространственный заряд прибавляет к этой силе член, который изменяет число бетатронных колебаний на обороте. Обозначая индексом «0» величины в отсутствие пространственного заряда, можно записать

$$K = K_0 + \delta K, \quad (27.3)$$

$$v = v_0 + \delta v. \quad (27.4)$$

При дифференцировании уравнения (27.2) получаем

$$\delta K = \frac{2v\delta v}{R^2}. \quad (27.5)$$

Предполагается, что число бетатронных колебаний в отсутствие пространственного заряда $v_0 = m \pm 0,25$, где m — целое число.

Предельно допустимая величина сдвига числа бетатронных колебаний определяется условием непопадания в полосу параметрического полуполого резонанса δn :

$$|\delta v| \lesssim 0,2 \div 0,25. \quad (27.6)$$

Смещение δv числа бетатронных колебаний оказывает влияние на бетатронные колебания отдельных частиц около замкнутой орбиты, но не влияет на последнюю. Коллективное взаимодействие пучка и стенки рассматривается в следующей главе.

По мере того как частота бетатронных колебаний отдельных частиц достигает какой-либо запрещенной полосы, происходит их потеря, причем [47] пучок в целом сохраняет кажущуюся устойчивость и только деформируется огибающая пучка, вызывая потерю частиц при случайном контакте со стенкой. Таким образом, рассматриваемый в этой главе резонанс приводит только к увеличению сечения пучка, что в свою очередь ограничивает интенсивность пучка, могущего циркулировать в вакуумной камере данных размеров.

Силы, вызванные пространственным зарядом. Заряд пучка возбуждает поле, которое описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho; \\ \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \rho \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (27.7)$$

где ρ — плотность заряда и v — скорость его движения.

Вводя цилиндрические координаты r, φ, s , относящиеся к цилиндру, занятому пучком, и интегрируя предыдущие уравнения, можно получить поле пространственного заряда внутри пучка:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r; \\ B_\varphi &= \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{v}{c^2} r. \end{aligned} \right\} \quad (27.8)$$

Это поле действует на каждую частицу с силой

$$\delta \mathbf{f} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

радиальная (и единственная) составляющая которой

$$\delta f_r = e (E_r - v B_\varphi) = \frac{e\rho}{2\varepsilon_0} (1 - \beta^2) r = \frac{e\rho}{2\varepsilon_0 \gamma^2} r. \quad (27.9)$$

Релятивистская природа магнитных сил. Первый член в скобках формулы (27.9) имеет электростатическое происхождение. Второй член — β^2 обусловлен действием магнитных сил и имеет релятивистскую природу. Для иллюстрации рассмотрим силы взаимодействия между частицами в их собственной системе координат Σ^* , в которой имеем скорость $v^* = 0$ и плотность заряда ρ^* . Силы от пространственного заряда в этой системе чисто электростатические:

$$\delta f^* = \frac{e\rho^*}{2\varepsilon_0} r^*.$$

Величины, определенные в собственной системе Σ^* , преобразуются при переходе в лабораторную систему Σ :

$$\delta f^* = \frac{d}{d\tau} \mathbf{p}_\perp^* = \gamma \frac{d}{dt} \mathbf{p}_\perp = \gamma \delta f; \quad \rho^* = \rho/\gamma; \quad r^* = r.$$

Это, в соответствии с уравнением (27.9), дает

$$\delta f_r = \frac{e\rho}{2\varepsilon_0\gamma^2} r.$$

Следовательно, релятивистское преобразование проявляется в коэффициенте $1/\gamma^2$, который не зависит от распределения зарядов в пучке.

Предел плотности. Пусть плотность частиц внутри непрерывного пучка равна

$$\frac{\rho}{e} = \frac{N}{2\pi RS},$$

где N — общее число частиц, $S = \pi r_M^2$ — площадь сечения пучка. Сила δf_r создает соответствующее ускорение частицы:

$$\delta f_r = m_0\gamma\delta\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) = m_0\gamma(\beta c)^2\delta\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (27.9), получим

$$\delta\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right) = \frac{r_0 N}{RS\beta^2\gamma^3} r, \quad (27.10)$$

где

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_0c^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м для электронов};$$

$$1,5 \cdot 10^{-18} \text{ м для протонов.}$$

Из сравнения уравнений (27.10), (27.1) и (27.5) видно, что

$$\frac{r_0 N}{RS\beta^2\gamma^3} = -\delta K = \frac{2v|\delta v|}{R^2}$$

[см. (27.5)], откуда

$$S = \frac{r_0 RN}{2v|\delta v|\beta^2\gamma^3}. \quad (27.11)$$

Это величина сечения, которое пучок должен иметь для того, чтобы при N частицах изменение числа бетатронных колебаний было бы не больше, чем δv .

В соответствии с теоремой Лиувилля сечение пучка сжимается в течение цикла ускорения как $s \sim 1/\beta\gamma$, т. е. медленнее, чем изменяется величина $1/\beta^2\gamma^3$. Следовательно, влияние пространственного заряда особенно ощутимо при инжекции.

Уравнение (27.11) справедливо в том случае, когда пространственный заряд не нейтрализован. Можно легко убедиться в справедливости формулы

$$S' = \frac{r_0 RN}{2v|\delta v|\gamma} \quad (27.11a)$$

для случая однородной нейтрализации заряда равным числом частиц с противоположным знаком заряда. Влияние нейтрализации становится заметным ($S' > S$) при $\gamma > \sqrt{2}$. Обычно скорость на-

растания энергии во время ускорения велика по сравнению со скоростью нейтрализации. Таким образом, реальным пределом пространственного заряда пучка является предел, существующий для пучка без нейтрализации при энергии инжекции.

В дальнейшем изложении предполагается, что нейтрализация пучка отсутствует. Предел плотности $n = N/2\pi RS$ дается выражением

$$n = \frac{v|\delta v|}{\pi R^2 r_0} \beta^2 \gamma^3. \quad (27.12)$$

Соответственно предел общего числа частиц

$$N = \frac{2v|\delta v|\beta^2 \gamma^3}{r_0 R} S.$$

Вводя адмиттанс пучка $A = vS/R$ [см. формулу (8.23)], получим

$$N = \frac{2|\delta v|\beta^2 \gamma^3 A}{r_0}. \quad (27.13)$$

Заметим, что эта величина зависит только от энергии и адмиттанса и не зависит от всех остальных характеристик ускорителя (радиуса, числа бетатронных колебаний за один оборот, структуры периода фокусировки).

Пучок эллиптического сечения, состоящий из сгустков. Влияние стенок. В пучке эллиптического сечения (большая полуось a , малая полуось b , рис. 47) составляющая силы пространственного за-

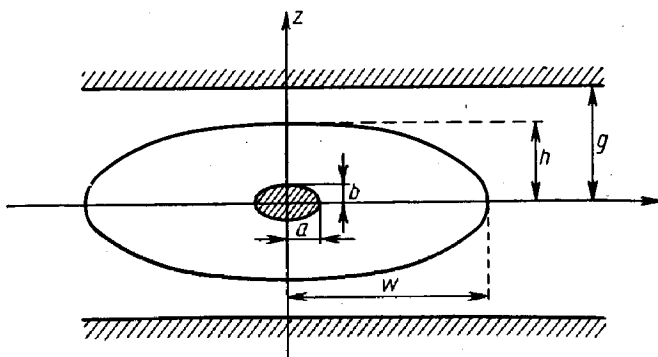


Рис. 47.

ряда по малой оси b является преобладающей. Пусть ν — соответствующее этому направлению число бетатронных колебаний. Расчеты показывают [49], что в этом случае общее число частиц, соответствующее предельному пространственному заряду:

$$N = \frac{2\nu|\delta v|\beta^2 \gamma^3}{Rr_0} \frac{\pi b(a+b)}{2} BF. \quad (27.14)$$

Коэффициенты B и F введены для учета эффектов группировки (банчирования) пучка и влияния стенок. Коэффициент группировки $B = \Delta\theta/2\pi \leq 1$ учитывает укорочение азимутальной области, занимаемой частицами под влиянием высокочастотного поля. Коэффициент F отражает влияние стенок (сил от изображений пучка как электростатических, так и магнитных). Как показано в работе [48], коэффициент

$$F = \left\{ 1 + \frac{b(a+b)}{h^2} [\varepsilon_1 (1 + B\beta^2\gamma^2) + \varepsilon_2 B\beta^2\gamma^2 (h^2/g^2)] \right\}^{-1}, \quad (27.15)$$

где h — полувысота вакуумной камеры; g — полувысота зазора магнита. Коэффициенты ε_1 и ε_2 зависят соответственно от геометрии камеры и геометрии полюсных наконечников:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} \pi^2/48 & \text{— для плоских параллельных стенок бесконечных размеров;} \\ 0 & \text{— для камеры круглого сечения;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = \pi^2/48 \text{— для полюсных наконечников магнита в виде параллельных плоскостей и приближенно для полюсных наконечников с гиперболическими образующими.}$$

Если камера эллиптическая (большая полуось ω , малая полуось h), то для ε_1 имеем

ω/h	1	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$2/1$	∞
ε_1	0	0,090	0,107	0,134	0,172	$0,206 = \frac{\pi^2}{48}$

Следует отметить, что для очень больших энергий а) число N стремится к величине, пропорциональной γ ; б) размеры камеры становятся более определяющими, а размеры пучка играют меньшую роль; в) влияние коэффициента банчирования уменьшается.

Рассмотрим в качестве примера протонный синхротрон ЦЕРН (состояние на 1962 г.).

Для этого ускорителя условия при инжекции следующие:

$$T_i = 50 \text{ Мэв};$$

$$(v/c)_i = \beta_i = 0,31; \quad \gamma_i = 1,05;$$

$$A_i = 60 \cdot 10^{-6} \text{ м} \cdot \text{рад}.$$

Полагая $B \approx 1,3$; $b \approx a$; $F \approx 1$; $|\delta v| = 0,2$, с помощью формулы (17.13), умноженной на B , можно найти предельное число частиц $N \approx 6 \cdot 10^{11}$. Эта величина получается при токе инжекции $I_i = eN\beta c/2\pi RP$, где P — эффективность захвата.

Эффективность захвата для протонного синхротрона ЦЕРН $P \approx 0,6$, а требующийся ток $I_i \approx 25 \text{ ма}$. В действительности при инжекции $I_i = 40 \div 50 \text{ ма}$, а предельное число частиц N не превосходит $(3 \div 4) \cdot 10^{11}$, что соответствует нашим расчетам.

Радиус согласованного пучка находится по формуле (8.22)

$$a = \sqrt{\frac{RA}{\pi v}} = 1,9 \text{ см.}$$

Приблизительно такая же величина и была получена при измерениях на ускорителе.

Глава 28

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧКА СО СТЕНКОЙ КАМЕРЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В этой главе использованы следующие обозначения: Ω — угловая скорость обращения частиц; ω — локальная угловая частота когерентных поперечных колебаний; ν , ν_0 , ν_k — числа бетатронных колебаний частиц за один оборот ($\nu_0 = \nu$ — среднее значение ν); $\nu_c = \zeta + i\eta$ — число когерентных бетатронных колебаний за один оборот; n — мода модуляции пучка на обороте; $\delta = \nu_c - \nu_0$; $x = \nu - \nu_0$; N_0 — число частиц в отрезке пучка протяженностью $r_0 = (1/4\pi\epsilon_0) (e^2/m_0c^2)$; R — средний радиус орбиты пучка.

28.1. Дисперсионное соотношение

Введение. Во многих ускорителях, в частности в электронной модели MURA на энергию в 40 Мэв, а также в накопительных электронных кольцах на 450 Мэв (Стенфорд), сравнительно недавно обнаружен новый тип неустойчивости, который проявляется в нарастании амплитуды поперечных когерентных колебаний (z) всего пучка*. Для ускорителя MURA с непрерывным пучком мгновенная орбита представляет собой синусоиду с целым числом периодов n , которая вращается относительно ускорителя. Число n может принимать различные значения, по-видимому, случайные, но всегда $n > \nu$, где $\nu = \nu_z$ — собственное число бетатронных колебаний. Локальная частота этих колебаний, найденная экспериментально, $\omega \approx (n \div \nu)\Omega$, где Ω — частота обращения.

В модели MURA с $\nu_z = 2,8$ наблюдались величины n , равные иногда 3, иногда 4, иногда 5 или 6. Постоянная времени нарастания амплитуды этих колебаний имеет порядок миллисекунд. Эта неустойчивость проявляется при токе пучка, превышающем 5—10 α в модели MURA и несколько десятков миллиампер в стенфордских накопительных кольцах. Распределение в широкой полосе присут-

* См. также работы по встречным пучкам ИЯФ СО АН СССР, например «Атомная энергия», 22, вып. 3 (1967). — Прим. ред.】

ствующих в пучке частот бетатронных колебаний улучшает устойчивость.

В работах [51] и [55] предложена теория, которая объясняет эту неустойчивость взаимодействием между пучком и обладающей омическим сопротивлением стенкой камеры.

Представим себе случайно возникшее малое когерентное поперечное колебание пучка. Оно вызывает переменные электромагнитные поля внутри объема, ограниченного стенками камеры. Эти поля в свою очередь воздействуют на каждую частицу в пучке. Силы воздействия параллельны поперечной скорости пучка. Их фаза находится практически в квадратуре с поперечной скоростью частиц. Однако в случае конечной проводимости стенки сила имеет также небольшую составляющую, совпадающую по фазе со скоростью. Эта составляющая увеличивает амплитуду колебаний.

Хотя в настоящее время, по-видимому, имеются некоторые количественные расхождения с результатами измерений, излагаемая теория достаточно близка к истине.

Кинематика когерентных колебаний. Для простоты рассмотрим непрерывный кольцевой пучок с однородной линейной плотностью. Разложение в ряд Фурье орбиты описанного выше типа выражается:

$$e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i(n\theta + \varphi_n)},$$

где ω может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Знак ω определяет направление изменения фазы колебаний. Как будет показано ниже [см. формулу (28.15)], интересующая нас неустойчивость может существовать только в случае $\omega > 0$.

В дальнейшем будем рассматривать не весь ряд, а только один его член. Исследуем, таким образом, орбиту вида

$$\bar{z} = \zeta e^{i(n\theta - \omega t)}. \quad (28.1)$$

С той же целью упрощения предположим, что все частицы обладают одной и той же угловой скоростью обращения Ω , так что для малого отрезка пучка $\theta(t) = \Omega t$ и

$$\bar{z} = \zeta e^{i(n\theta - \omega t)} = \zeta e^{i v_c \Omega t}, \quad (28.2)$$

где

$$\omega = (n - v_c) \Omega, \quad (28.3)$$

v_c — число когерентных бетатронных колебаний за один оборот.

Уравнение (28.3) устанавливает соотношение между числом колебаний v_c и локальной частотой когерентного движения ω .

Согласно уравнению (28.2), траектория пучка имеет вид синусоиды с целым числом периодов за оборот и с угловой скоростью $\Omega' = \omega/n = (1 - v_c/n)\Omega$. Далее будет видно [см. формулу (28.15)], что амплитуда синусоиды может нарастать только при $\omega > 0$ или

$$n > v_c, \quad (28.4)$$

т. е. тогда, когда скорость изменения фазы колебаний имеет тот же знак, но меньшую величину по сравнению со скоростью изменения фазы частиц.

Динамика неустойчивости. Пусть интенсивность пучка характеризуется величиной

$$N_0 = \frac{Nr_0}{2\pi R}, \quad (28.5)$$

где N_0 — число частиц, содержащихся в отрезке пучка длиной $r_0 = (1/4\pi\epsilon_0) e^2/m_0c^2$ ($N_0 = 1$ для тока $I = 17\,000$ а); N — полное число частиц в пучке.

Сила \mathbf{f} , с которой переменное поле колеблющегося пучка воздействует на каждую частицу, как это будет доказано в разд. 28.2, пропорциональна \bar{z} :

$$\mathbf{f} = f_z \mathbf{u}_z = e(\mathbf{E} + c(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})) = KN_0 \bar{z}(U + V + iV), \quad (28.6)$$

где \mathbf{u}_z — единичный вектор.

Постоянная $K = 2m_0\gamma v_c \Omega$ введена для упрощения записи дальнейших уравнений; U , V — действительные числа, постоянные для данного ускорителя и имеющие размерность частот. Обычно $U < 0$, а V имеет тот же знак, что ω , т. е. $V > 0$ для $\omega > 0$. Кроме того, $|U| \gg |V|$. В дальнейшем приближенно принято $U + V + iV \approx \approx U + iV$.

Для того чтобы установить соотношение, позволяющее определять число когерентных бетатронных колебаний за один оборот, будем следовать основным положениям работы [50]. Запишем уравнение движения k -й частицы:

$$m_0\gamma(\ddot{z}_k + v_k^2\Omega^2 z_k) = f_z = 2m_0\gamma v_c \Omega(U + iV)N_0 \bar{z}, \quad (28.7)$$

где $v_k\Omega$ — частота бетатронных колебаний частицы в отсутствие силы f_z .

Решение этого уравнения имеет вид

$$z_k = \xi_k e^{i v_c \Omega t}, \quad (28.8)$$

где ξ_k изменяется медленно, поскольку $|v_k - v_c| \ll v_c$. Следовательно, можно подставить в уравнение (28.7) $\dot{z} \approx -v_c^2 \Omega^2 z_k$. Затем, суммируя по N_0 частицам отрезка пучка и деля на $m_0\gamma\Omega^2 \times (v_k^2 - v_c^2)$, можно найти

$$\sum_k z_k = N_0 \bar{z} = \frac{2v_c}{\Omega}(U + iV) \left[\sum_k \frac{1}{v_k^2 - v_c^2} \right] N_0 \bar{z}.$$

Далее вводим непрерывную функцию распределения $f(v)$, нормированную к единице и суммирование по k заменяем интегралом.

Получаем дисперсионное соотношение

$$1 = \frac{2v_c N_0}{\Omega} (U + iV) \int_0^{\infty} \frac{f(v) dv}{v^2 - v_c^2} \approx \frac{N_0}{\Omega} (U + iV) \int_0^{\infty} \frac{f(v) dv}{v - v_c}. \quad (28.9)$$

Это уравнение может быть решено относительно величины v_c , которая в общем случае комплексна. Действительная часть v_c определяет частоту когерентных бетатронных колебаний, а мнимая часть — скорость нарастания амплитуды, позволяя судить об устойчивости когерентных колебаний (28.2).

Интегрирование дисперсионного соотношения.

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} v_c &= \zeta + i\eta; \\ x &= v - v_0; \\ \delta &= \zeta - v_0, \end{aligned} \right\} \quad (28.10)$$

а также постоянную нарастания амплитуды когерентных колебаний (28.2):

$$\frac{1}{\tau_c} = -\Omega\eta. \quad (28.11)$$

Дисперсионное соотношение (28.9) можно переписать в виде

$$1 = -\frac{N_0}{\Omega} (U + iV) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{(\delta - x) + i\eta}, \quad (28.12)$$

где

$$\frac{1}{U^2} [(-U) + iV] = \frac{N_0}{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(\delta - x) - i\eta] f(x) dx}{(\delta - x)^2 + \eta^2}. \quad (28.13)$$

[В уравнении (28.13) в левой части отброшен член $V^2 \ll U^2$ и введено $(-U) > 0$.]

Далее последовательно рассмотрим три частных вида распределения $f(x)$.

1) v имеет единственное значение:

$$v \equiv v_0, \quad x \equiv 0.$$

На основании соотношения (28.12)

$$\Omega(\delta + i\eta) = -N_0(U + iV),$$

откуда

$$\delta = N_0(-U)/\Omega > 0,$$

$$\frac{1}{\tau_c} = -\Omega\eta = N_0V > 0 \text{ для } V > 0 (\omega > 0). \quad (28.14)$$

Отклонение числа δ когерентных колебаний за один оборот относительно ν_0 положительно. То же самое имеет место и для постоянной нарастания амплитуды $1/\tau_c$, если $V > 0$, т. е.

$$\omega > 0. \quad (28.15)$$

Когерентные колебания в этом случае неустойчивы. В дальнейшем этот неблагоприятный случай (28.15) не рассматривается.

2) Равномерное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2q} & \text{для } -q < x < +q; \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad (28.16)$$

Интегрирование выражения (28.13) при $f(x)$, имеющей вид (28.16), дает при $\eta \rightarrow 0$

$$\frac{\Omega}{N_0 U^2} [(-V) + iV] = \begin{cases} \frac{1}{4q} \ln \left(\frac{\delta + q}{\delta - q} \right)^2 - \frac{i\eta}{\delta^2 - q^2} & \text{для } \delta > q; \\ \frac{1}{4q} \ln \left(\frac{[\delta + q]}{\delta - q} \right)^2 - \frac{i\eta}{\delta^2 - q^2} - \frac{i\pi}{2q} & \text{для } \delta < q. \end{cases} \quad (28.17a)$$

$$(28.17b)$$

Существование третьего члена в уравнении (28.17b) связано с тем, что особенность в уравнении (28.13) для $x = \delta$ при $\eta \rightarrow 0$ расположена внутри области интегрирования.

Выделяя действительную часть (28.17a) или (28.17b), найдем

$$\left| \frac{\delta + q}{\delta - q} \right| = \exp \frac{2q\Omega}{(-U)N_0}. \quad (28.18)$$

Для сравнения с уравнением (28.14) исключим $\delta \rightarrow 0$ при $(-U) \rightarrow \infty$, оставляя только случай

$$q < \delta < \infty \text{ для } 0 < (-U) < \infty. \quad (28.19)$$

Выделяя мнимую часть в уравнении (28.17a), получим

$$\frac{1}{\tau_c} = -\eta\Omega = \frac{V}{N_0} \frac{\Omega^2}{U^2} (\delta^2 - q^2) \geq 0. \quad (28.20)$$

Этот результат показывает, что когерентные колебания частиц с равномерным распределением $f(v)$ всегда неустойчивы. В частности имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_c} = N_0 V > 0.$$

3) Гауссово распределение.

Если бы в предыдущем примере существовала такая ситуация, при которой смещение числа когерентных бетатронных колебаний было бы ограничено, $\delta = \zeta - \nu_0 < q$, т.е. δ расположена в диапазоне собственных чисел бетатронных колебаний частиц, то в этом случае [см. формулу (28.17b)] знак коэффициента η был бы отрицательным

и когерентные колебания затухали бы. Понятно, что для распределения $f(x)$ в виде гауссовой колокольной кривой бесконечной протяженности при конечном смещении частоты когерентных колебаний δ имеется возможность затухания когерентных колебаний.

Аналогичная ситуация имеет место для релятивистского пучка электронов, проходящего через плазму. Ионы плазмы играют роль проводящих стенок. В этом случае также может существовать устойчивое состояние. Здесь играет роль механизм, относящийся к затуханию средней (когерентной или коллективной) амплитуды колебаний большого числа осцилляторов, занимающих некоторую полосу частот и возбуждаемых связью с их средней амплитудой. Этот механизм в литературе носит название «затухание Ландау» [53—55].

Для пучков в ускорителях также наблюдается нижний порог устойчивого состояния, зависящий от интенсивности N_0 пучка, а также от вида функции распределения и величины дисперсии $\Delta(v_z, \Omega)$ собственных частот бетатронных колебаний.

Случай гауссова распределения собственных частот бетатронных колебаний рассмотрен в работе [55].

Подстановка функции

$$f(x) = f(v - v_0) = (1/\sqrt{\pi q}) e^{-x^2/q^2} \quad (28.21)$$

в уравнение (28.11) дает

$$\frac{q\Omega}{N_0 U^2} (U - iV) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{y - y_1} = Y(y_1), \quad (28.22)$$

где $qu = x = v - v_0$ (v_0 — частота, соответствующая максимуму распределения),

$$qu_1 = (v_c - v_0) = \delta + i\eta.$$

Далее находим решение уравнения (28.22), удовлетворяющее условию: y_1 — действительная величина, $\eta = 0$ и соответствующее порогу устойчивости.

Функция $Y(y_1)$ — так называемая функция дисперсии плазмы — рассмотрена и протабулирована в работе [52].

Если $|U| \gg V$, то $\text{Re}Y \gg \text{Im}Y$. Это последнее условие удовлетворяется только для значений переменной y_1 , для которых справедливо асимптотическое разложение [52]

$$Y(y_1) = i\sqrt{\pi}\sigma e^{-y_1^2} - \frac{1}{y_1} + \dots \quad (28.23)$$

($\sigma = 1$ для действительных значений y_1).

Подставляя это выражение в уравнение (28.22) и выделяя действительные члены, можно получить $y_1 = \delta/q = -UN_0/q\Omega$. Смещение частоты когерентных колебаний, следовательно, равно

$$v_c - v_0 = \delta = (-U) N_0 / \Omega. \quad (28.24)$$

Приравнявая далее мнимые члены с учетом формулы (28.24), получаем

$$y_1 e^{-y_1^2} = -V/\sqrt{\pi}(-U). \quad (28.25)$$

Разрешая это уравнение относительно $y_1 = \delta/q$, получим критическую величину q_s полуширины распределения, соответствующую порогу устойчивости. Например, для обычной величины отношения $V/(-U) \approx 0,2$ можно найти $y_1 = \delta/q_s = 1,64$.

28.2. Расчет поля пучка

Цилиндрический пучок в цилиндрической камере. Этот вопрос излагается здесь в соответствии с работой [55]. Рассматривается прямой цилиндрический пучок радиуса a , расположенный по оси цилиндрической камеры радиусом b (рис. 48). Используются цилиндрические r, φ, z или декартовы x, z, s координаты. Предполагается, что пучок совершает независимые малые поперечные колебания

$$\bar{z} = \zeta e^{-i\omega t}. \quad (28.26)$$

Пусть линейная плотность заряда $\lambda = eN/2\pi R = eN_0/r_0$ и объемная плотность

$$\rho_0 = eN_0\pi a^2 r_0 \quad (28.27)$$

постоянны в области $0 < r < a$; $0 < S < 2\pi R$.

Плотность заряда колеблющегося пучка можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (28.28)$$

где ρ_0 — плотность неподвижной части пучка, находящейся в центральном положении; ρ_1 — плотность подвижной части пучка, которая добавляется к плотности ρ_0 по периферии пучка, когда он колеблется (рис. 48). Эти две величины связаны соотношением

$$\rho_1 = \rho_0 \bar{z} \cos \varphi \delta (r - a). \quad (28.29)$$

Соответственно для плотности тока имеем

$$\delta_{1s} = \rho_1 \beta c \delta (r - a).$$

Необходимо найти решение для возмущенных величин ρ_1 и δ_{1s} , удовлетворяющее уравнениям Максвелла при граничных условиях, определяемых стенками камеры. Первоначально предположим (поле

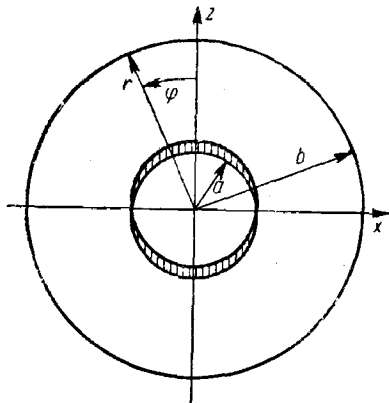


Рис. 48.

для этого случая обозначается индексом «1»), что проводимость стенки $\sigma = \infty$; тогда граничные условия дают

$$E_{1\varphi}(r=b) = 0; \quad B_{1r}(r=b) = 0. \quad (28.30)$$

Решение этой задачи дает для $a < r < b$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{1z}(\cos \varphi \mathbf{u}_r - \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi) = E_{1z} \mathbf{u}_z, \\ \mathbf{B}_1 &= B_{1x}(\sin \varphi \mathbf{u}_r + \cos \varphi \mathbf{u}_\varphi) = -B_{1x} \mathbf{u}_x. \end{aligned} \right\} \quad (28.31)$$

Эти поля однородны и имеют единственную составляющую. Далее, для $a < r < b$ имеем

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= C_E \{ [(b/r)^2 + 1] \cos \varphi \mathbf{u}_r + [(b/r)^2 - 1] \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi \}; \\ \mathbf{B}_1 &= C_B \{ [(b/r)^2 - 1] \sin \varphi \mathbf{u}_r - [(b/r)^2 + 1] \cos \varphi \mathbf{u}_\varphi \}, \end{aligned} \right\} \quad (28.32)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \rho_0 \bar{z} [1 - (a/b)^2] = -(1/2) \mu_0 c^2 \rho_0 \bar{z} [1 - (a/b)^2]; \\ B_{1x} &= -(1/2) \mu_0 \beta c \rho_0 \bar{z} [1 - (a/b)^2]; \\ C_E &= \frac{1}{2\epsilon_0} \rho_0 \bar{z} (a/b)^2 = (1/2) \mu_0 c^2 \rho_0 \bar{z} (a/b)^2; \\ C_B &= -(1/2) \mu_0 \beta c \rho_0 \bar{z} (a/b)^2. \end{aligned} \right\} \quad (28.33)$$

Легко убедиться, что эти выражения удовлетворяют уравнениям Максвелла с учетом зарядов и токов на периферии возмущенного пучка и что выражения (28.32) удовлетворяют также и граничным условиям (28.30).

Если теперь предположить, что проводимость стенки σ конечна, то на поверхности стенки появится аксиальная составляющая электрического поля [27]:

$$\left. \begin{aligned} E_{2s}(b, \varphi) &= -(1-i) \Re B_{1\varphi}(b, \varphi), \\ \Re &= \sqrt{\frac{\omega}{2\rho_0\sigma}}, \end{aligned} \right\} \quad (28.34)$$

где ω — угловая частота поля $B_{1\varphi} = \hat{B}_{1\varphi} e^{-i\omega t}$.

Дополнительное индуцированное поле с индексом «2», возникающее благодаря влиянию стенки, обладающей сопротивлением, рассматривается как очень малое возмущение основного индуцированного поля с индексом «1».

Подставляя выражения (28.31) и (28.34), получим, что около стенки

$$E_{2s}(b, \varphi) = 2C_B(1-i) \Re \cos \varphi. \quad (28.35)$$

В области $0 < r < b$ поле определяется как

$$E_{2s}(r, \varphi) = 2C_B(1-i) \left(\frac{r}{b}\right) \Re \cos \varphi. \quad (28.36)$$

Это поле точно удовлетворяет граничным условиям (28.35), а также приближенно и уравнению распространения волн $[\Delta + (\omega/c)^2]E = 0$ в области $0 < r < b$, в которой можно пренебречь величиной $(\omega/c)^2 \ll (1/r^2)$, поскольку $(1/r^2)$ имеет величину порядка $(1/E)\Delta E$.

Кроме того, в соответствии с соотношением $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ электрическому полю соответствует магнитное поле:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \int \left(-\frac{\partial E_{2s}}{r d\varphi} \mathbf{u}_r + \frac{\partial E_{2s}}{\partial r} \mathbf{u}_\varphi \right) dt = \\ &= -2C_B (1+i) \frac{\Re}{b\omega} (\sin \varphi \mathbf{u}_r + \cos \varphi \mathbf{u}_\varphi) = -B_{2x} \mathbf{u}_x, \end{aligned} \quad (28.37)$$

где

$$B_{2x} = -2C_B (1+i) \frac{\Re}{b\omega}.$$

Общая сила, действующая на частицы при поперечных колебаниях пучка

$$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + c\beta \times \mathbf{B}),$$

где

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Подставив в эти уравнения выражения (28.31), (28.33) и (28.37), можно убедиться, что искомая сила имеет 2-ую составляющую

$$f_z = e [E_{1z} - \beta c (B_{1x} + B_{2x})] = 2m_0 \gamma v_c \Omega N_0 \bar{z} [U + (1+i)V], \quad (28.38a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U &= -\frac{Rc [1 - (a/b)^2]}{a^2 v_c \beta \gamma^3}; \\ V &= \frac{2Rc\beta \Re}{b^3 \omega v_c \gamma}; \\ \Re &= \sqrt{\omega/2\mu_0 \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (28.38b)$$

Приведем здесь для справок величины проводимости (при 20° С) для некоторых материалов:

Медь (отожженная) . . .	$5,9 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$
Золото	$4,1 \cdot 10^7 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$
Нержавеющая сталь . . .	$1,6 \cdot 10^6 \text{ ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$

Плоский пучок прямоугольного сечения в плоской камере. Точные выражения для релятивистских полей плоского пучка (ленточный пучок) в плоской камере довольно сложны. Для этого случая рекомендуется обратиться к первоисточнику [55]. Взаимосвязь символов U_{SNL} , V_{SNL} , используемых в работе [55], и наших символов следующая:

$$U_{SNL} = N_0 U; \quad V_{SNL} = N_0 V.$$

Приближенное выражение для плоского пучка (рис. 49) в случае, если $\omega \ll 2b$, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \text{для } V \ll U; \quad h \ll 2b \\ V_{\square} = \frac{\pi^2 R c \beta \mathfrak{R}}{6 b^3 \omega v_c \gamma}, \\ U_{\square} = - \frac{\pi^3 R c}{4 h \omega \omega v_c \beta \gamma^3}. \end{aligned} \right\} \quad (28.39)$$

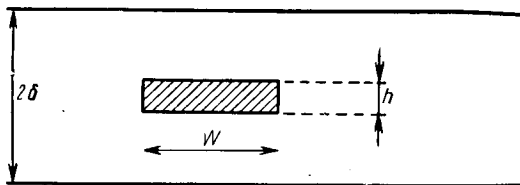


Рис. 49.

28.3. Пучок из последовательности коротких сгустков

Силы. Этот раздел написан на основании работы Куранта и Сесслера [57], опубликованной в сентябре 1965 г. на Международной конференции по ускорителям высоких энергий во Фраскати.

Для того чтобы получить выражение для сил, с которыми пучок, состоящий из коротких сгустков, воздействует сам на себя, используется выражение силы для непрерывного пучка [см. формулы (26.6) и (28.38)] с постоянной линейной плоскостью $dN/d\theta$, колеблющегося в поперечном направлении по закону $z = \xi e^{-i\omega t}$. Введем поперечный дипольный момент на единицу угла θ

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dN}{d\theta} \xi e^{-i\omega t}. \quad (28.40)$$

Взаимодействие колеблющегося пучка со стенкой камеры вызывает появление полей, а это, в свою очередь, вызывает силу f_z , действующую на каждую частицу пучка:

$$f_z = e(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_z = \frac{dP}{d\theta} \left(U_1 + \sqrt{\frac{1}{\omega}} W \right). \quad (28.41)$$

В соответствии с формулой (28.38) для камеры цилиндрического сечения имеем

$$\begin{aligned} U_1 &= -2m_0 c^2 \frac{r_0}{R} \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right] = 2m_0 \gamma \Omega v \frac{r_0}{R} U; \\ W &= +2m_0 c^2 \frac{r_0}{R} \cdot \frac{2\beta^2}{b^3} \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \sigma}} = 2m_0 \gamma \Omega v \frac{r_0}{R} \sqrt{2\omega V}, \end{aligned} \quad (28.42)$$

где a и b — радиус пучка и радиус камеры соответственно; σ — проводимость стенки. Обычно имеет место соотношение $W \ll |U_1|$.

Рассмотрим уравнения движения для отдельного электрона, обозначив индексом « r » соответствующие переменные:

$$\begin{aligned} z_r(t) &= \zeta_r e^{i(\varphi_r + \nu_r \Omega t)}; \\ \theta_r(t) &= \theta_r + \Omega t. \end{aligned}$$

Поперечный дипольный момент этого электрона на единицу угла θ

$$\frac{dP_r}{d\theta} = \zeta_r e^{i(\varphi_r + \nu_r \Omega t)} \delta_p(\theta - \theta_r - \Omega t), \quad (28.43)$$

где δ_p — периодическая функция Дирака:

$$\delta_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(\theta - \theta_r - \Omega t)}.$$

Следовательно,

$$\frac{dP_r}{d\theta} = \frac{\zeta_r}{2\pi} e^{i\varphi_r} \sum_k e^{i[k(\theta - \theta_r) - (k - \nu_r)\Omega t]}. \quad (28.44)$$

Каждый член этой суммы имеет вид (28.40) и дает вклад в силу f_z , возбужденную этим электроном и воздействующую как на него самого, так и на другие электроны пучка в соответствии с уравнением (28.41), в котором ω заменяется на $(k - \nu_r)\Omega$. Совокупность этих членов определяет всю силу

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\zeta_r}{2\pi} e^{i\varphi_r} \sum_k \left[U_1 + W \sqrt{\frac{i}{(k - \nu_r)\Omega}} \right] e^{i[k(\theta - \theta_r) - (k - \nu_r)\Omega t]} = \\ &= U_1 \frac{dP_r}{d\theta} + \frac{W}{\sqrt{\Omega}} \cdot \frac{\zeta_r}{2\pi} e^{i\varphi_r} \sum_k \sqrt{\frac{i}{k - \nu_r}} e^{i[k(\theta - \theta_r) - (k - \nu_r)\Omega t]}. \end{aligned} \quad (28.45)$$

Второй член, учитывающий сопротивление, записывается в виде

$$\frac{W}{\sqrt{\Omega}} \cdot \frac{\zeta_r}{2\pi} e^{i(\varphi_r + \nu_r \Omega t)} G(\alpha, \nu_r), \quad (28.46)$$

где

$$\begin{aligned} G(\alpha, \nu_r) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{i}{k - \nu_r}} e^{-ik\alpha}; \\ \alpha &= \theta_r + \Omega t - \theta. \end{aligned} \quad (28.47)$$

Можно показать [57], что

$$G(\alpha, \nu) = 2\sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-i\nu(\alpha + 2\pi s)}}{\sqrt{\alpha + 2\pi s}}. \quad (28.48)$$

Функция $G(\alpha, \nu)$ определяет амплитуду и фазу результирующей силы (или поля), созданной частицей на азимуте θ в момент t [$\alpha = \alpha(\theta, t)$] за время своих многократных предшествующих прохождений в моменты $t - \Delta t_s$, где $\Omega \Delta t_s = \alpha + 2\pi s$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Это поле, существующее после прохождения электрона, называют полем последействия wake-field* (англ.). Можно показать, исходя непосредственно из уравнений Максвелла [58], что это поле спадает по закону $1/\sqrt{\Delta t}$. Убывающая сила, вызываемая этим полем, имеет составляющую, находящуюся в фазе с поперечной скоростью бетатронных колебаний частиц, которые она возбудила. Знак зависит от числа бетатронных колебаний этих частиц ν за один оборот. Следовательно, знак убывающей силы будет определять, нарастает или затухает амплитуда колебаний. Таков механизм действия сил для пучка, состоящего из сгустков, который будет в дальнейшем уточнен.

Уравнение движения одной частицы. Пусть имеется большое число частиц, сгруппированных в M очень коротких сгустков. Уравнение движения одной частицы s , расположенной в сгустке m и подвергающейся совместному действию основного фокусирующего и заворачивающего поля магнита и поля последействия от всех частиц r пучка, в соответствии с формулой (28.45) имеет вид

$$m_0 \gamma (\ddot{z}_s + \Omega^2 \nu_s^2 z_s) = U_1 \left(\sum \frac{dP}{d\theta} \right)_m + \frac{W}{2\pi \sqrt{\Omega}} \sum_r \zeta_r e^{i(\varphi_r + \nu_r \Omega t)} G(\theta_r - \theta_s, \nu_r). \quad (28.49)$$

Сумма $\left(\sum \frac{dP}{d\theta} \right)_m$ берется по всем частицам m -го сгустка.

Обратимся теперь к исследованию условий когерентности колебаний совокупности частиц, предполагая, что все колеблющиеся частицы имеют одинаковую частоту ν_c . Примем для всех частиц $\nu_s \equiv \nu_c$ и

$$z_s = \zeta_s e^{i(\varphi_s + \nu_c \Omega t)}, \quad (28.50)$$

а также что ν_c — комплексная величина

$$\nu_c = \zeta + i\eta, \quad (28.51)$$

где ζ — действительное число когерентных бетатронных колебаний на один оборот, а величина η характеризует затухание амплитуды колебаний. Постоянная затухания

$$\frac{1}{\tau} = -\eta \Omega \quad (28.52)$$

и колебания будут неустойчивыми, если

$$Im \nu_c = \eta < 0.$$

Таким образом, v_c , ξ и η выражают собой искомые характеристики когерентных колебаний.

В соответствии с формулой (28.50) запишем $\ddot{z}_s = -v_c^2 \Omega^2 z_s$; $\ddot{z}_s + \Omega^2 v_s^2 z_s = (v_s^2 - v_c^2) \Omega^2 z_s$. Подставив эти величины в уравнение (28.49) и разделив на $(v_s^2 - v_c^2)$, получим уравнение движения одной частицы:

$$m_0 \gamma \Omega^2 z_s = \frac{1}{v_s^2 - v_c^2} \left[U_1 \left(\sum \frac{dP}{d\theta} \right)_m + \right. \\ \left. + \frac{W}{2\pi \sqrt{\Omega}} \sum_r z_r G(\theta_r - \theta_s, v_c) \right]. \quad (28.53)$$

Уравнение движения сгустка. Имея уравнения движения отдельных частиц в машине типа (28.53), необходимо найти из этой системы уравнений величину v_c . Сократим практически бесконечное число этих уравнений до величины числа сгустков M , вводя уравнения, левая часть которых соответствует одному и тому же сгустку.

Суммы будут представлять дипольные моменты сгустков. Каждое из этих M уравнений описывает соотношение между искомой величиной v_c и дипольными моментами сгустков. Разрешая эти уравнения, можно получить одновременно искомую величину v_c и соотношения между моментами.

Произведем суммирование уравнений (28.53) для всех частиц s в m -м сгустке.

Пусть распределение частот v_s собственных колебаний по энергии дается функцией $f(v_s)$, имеющей единичную нормировку. Правая часть уравнения (28.53), просуммированная по всем частицам s сгустка, может быть записана как

$$\left(\sum_s \frac{1}{v_s^2 - v_c^2} [\quad] \right)_m = N_m \int \frac{f(v_s) dv_s}{v_s^2 - v_c^2} [\quad], \quad (28.54)$$

где N_m — число частиц в m -м сгустке; усреднение в квадратных скобках производится по всем s частицам в m -м сгустке. В левой части уравнения вводится дипольный момент m -го сгустка

$$\left(\sum_s z_s \right)_m = N_m (\bar{z}_s)_m = Q_m. \quad (28.55)$$

Для первого члена правой части получается

$$\left(\sum_s \frac{dP}{d\theta} \right)_m = N_m \left(\frac{\bar{dP}}{d\theta} \right)_m = \frac{Q_m}{\alpha}. \quad (28.56)$$

Предположим, что все сгустки имеют одну и ту же протяженность $\Delta\theta = \alpha$. Для второго члена правой части можно доказать при $\alpha \rightarrow 0$

[57] справедливость соотношения

$$\sum_r z_r \overline{G(\theta_r - \theta_s, v_c)} = \sum_{n \neq m} Q_n G(\theta_n - \theta_m, v_c) + Q_m G(2\pi, v_c). \quad (28.57)$$

Здесь каждый член с индексом $n = 0, 1, 2, \dots, m$. $M - 1$ определяет вклад одного сгустка в сумму по r , которая распространяется на все частицы.

В итоге уравнения (28.53), просуммированные по всем частицам m -го сгустка, дают уравнение движения сгустка

$$m_0 \gamma \Omega^2 Q_m = N_m \int \frac{f(v_s) dv_s}{v_s^2 - v_c^2} \left[\frac{U_1}{\alpha} Q_m + \frac{W}{2\pi \sqrt{\Omega}} Q_m G(2\pi, v_c) + \frac{W}{2\pi \sqrt{\Omega}} \sum_{n \neq m} Q_n G(\theta_n - \theta_m, v_c) \right]. \quad (28.58)$$

Уравнения для собственных значений. Собственные значения и число бетатронных колебаний за один оборот. При введении обозначений

$$U' = \frac{U_1}{\alpha}; \quad W' = \frac{W}{2\pi \sqrt{\Omega}}; \quad G_m = G(2\pi, v_c); \quad G_{m,n} = G(\theta_n - \theta_m, v_c) \quad (28.59)$$

и

$$\lambda(v_c) = \frac{m_0 \gamma \Omega^2}{\int \frac{f(v_s) dv_s}{v_s^2 - v_c^2}} \quad (28.60)$$

уравнение (28.58) примет вид

$$[N_m (U' + W' G_m) - \lambda] Q_m + N_m W' \sum_{n \neq m} Q_n G_{nm} = 0; \quad n, m = 0, 1 \dots M-1. \quad (28.61)$$

Это последнее соотношение является системой M уравнений для собственных значений λ_m . Имеется M собственных значений λ_m . Для каждой λ_m с помощью уравнения (28.60) можно найти числа бетатронных колебаний, которым она соответствует. Таким образом, решение поставленной выше задачи найдено.

Каждое решение, характеризуемое индексом m , соответствует возможной моде когерентных колебаний.

Разрешим сначала соотношение (28.60) относительно λ и $v_c = \zeta + i\eta$ для частного случая монохроматического пучка, в котором все числа бетатронных колебаний равны: $v_s = v_0$. Для этого случая $f(v_s) = \delta(v_s - v_0)$ и

$$\int \frac{f(v_s) dv_s}{v_s^2 - v_c^2} = \frac{1}{v_0^2 - v_c^2} \approx \frac{1}{2v_0(v_0 - \zeta - i\eta)} = \frac{m_0 \gamma \Omega^2}{\lambda} \quad (\lambda = \text{Re } \lambda + i \text{Im } \lambda). \quad (28.62)$$

Смещение числа бетатронных колебаний, устойчивость и постоянная нарастания амплитуд. Величина λ_m , определяемая выражениями (28.68) и (28.69), является комплексной. Вводя ее действительную или мнимую часть в выражение (28.63), получаем

$$\xi - \nu_0 = -\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2\nu_0 m_0 \gamma \Omega^2} = -\frac{N_{\text{общ}}}{2\nu_0 m_0 \gamma \Omega^2} \frac{U_1}{M \alpha} \quad (28.70)$$

с точностью до члена $W' \sqrt{MG} \ll U'$, который в общем случае пренебрежимо мал, и

$$\frac{1}{\tau} = -\eta \Omega = \frac{\operatorname{Im} \lambda}{2\nu_0 m_0 \gamma \Omega} = \frac{N_{\text{общ}} W}{4\pi \nu_0 m_0 \gamma \Omega \sqrt{M \Omega}} \operatorname{Im} G \left(2\pi \frac{\nu_c + m}{M} \right). \quad (28.71)$$

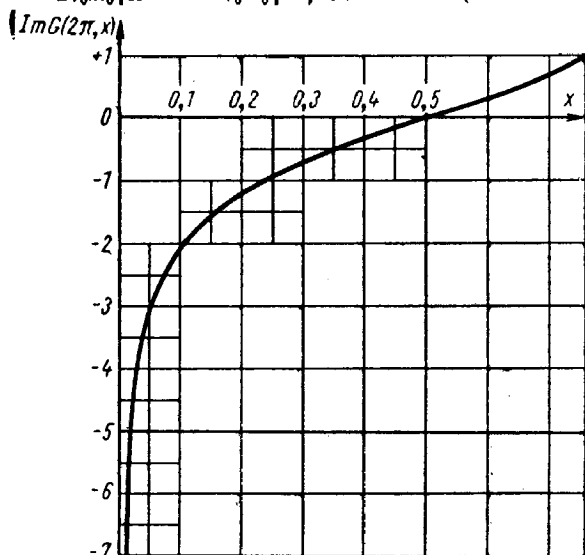


Рис. 496

Функция $\operatorname{Im} G(2\pi x) = -\sqrt{2} \sum_{s=1}^{\infty} (\sin 2\pi s x) / \sqrt{s}$ [см. (28.48)] обладает, подобно функции $\sin 2\pi s x$, свойствами периодичности и антисимметрии:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} G(2\pi, 1+x) &= \operatorname{Im} G(2\pi, x); \\ \operatorname{Im} G(2\pi, 1-x) &= -\operatorname{Im} G(2\pi, x). \end{aligned} \right\} \quad (28.72)$$

На рис. 496 представлена эта функция в области $0 < x < 1/2$. Она антисимметрична относительно $x = 1/2$ и имеет период $\Delta x = 1$. Практически для определения величины $\operatorname{Im} G$ следует отнять от аргумента $(\nu_c + m)/M$ функции G целое число k , такое, чтобы $0 < (\nu_c + m)/M - k = x < 1$, и найти по рис. 496

$$\operatorname{Im} G \left(2\pi, \frac{\nu_c + m}{M} \right) = \operatorname{Im} G(2\pi, x) = -\operatorname{Im} G(2\pi, 1-x).$$

Когерентные колебания пучка будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{неустойчивы для } 1/2 < x < 1 [\operatorname{Im} \lambda, \operatorname{Im} G > 0]; \\ \text{устойчивы для } 0 < x < 1/2 [\operatorname{Im} \lambda, \operatorname{Im} G < 0]. \end{array} \right\} \quad (28.73)$$

Сравнивая уравнения (28.70) и (28.71) с соответствующими величинами для непрерывного пучка, обозначенными индексом «1», находим смещение числа бетатронных колебаний

$$\zeta - \nu_0 = (\zeta - \nu_0)_1 \frac{2\pi}{\alpha M} = (\zeta - \nu_0)_1 / B, \quad (28.74)$$

где B — коэффициент банчирования ($B = 1$ для непрерывного пучка).

Для очень коротких сгустков ($B \ll 1$) смещение $\zeta - \nu_0$ становится относительно большим, а стабилизация пучка затуханием Ландау — проблематичной.

Аналогично определяется постоянная затухания амплитуды:

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{\tau_1} \right)_n \sqrt{\frac{2(n-\nu)}{M}} \operatorname{Im} G \left(2\pi, \frac{\nu_c + m}{M} \right). \quad (28.75)$$

Здесь величина $(1/\tau_1)_n$ относится к моде $n > \nu_c$ непрерывного пучка, а величина M и аргумент $(\nu_c + m)/M$ — к сбанчированному пучку; $(1/\tau)$ и $(1/\tau_1)_n$ — величины одного порядка.

Разность фаз дипольных моментов сгустков. Подставляя выражение (28.68) для λ_m в систему уравнений (28.66) и разрешая их относительно неизвестных $(Q_l)_m$, т. е. относительно дипольных моментов сгустков, получаем

$$(Q_l)_m = C e^{-2\pi i \frac{lm}{M}}; \quad l = 0, 1, \dots, M-1. \quad (28.76)$$

Индекс m определяет возможную моду когерентных колебаний. Моды различаются фазами бетатронных колебаний между сгустками.

Для заданных момента времени t и моды m фаза дипольных моментов изменяется от одного сгустка к другому на величину $-2\pi(m/M)$. Для моды $m = 0$ все сгустки колеблются в фазе. За каждый оборот фаза сгустков возрастает на $-2\pi m$.

Таблица 6
Разность фаз дипольных моментов $(Q_l)_m$ для $M = 3$

$l \backslash m$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	$-2\pi(1/3)$	$-2\pi(2/3)$
2	0	$-2\pi(2/3)$	$-2\pi(1/3)$

29.1. Введение

Заряженные частицы, из которых образован пучок, взаимно отталкиваются. Здесь рассматривается только азимутальная составляющая сил отталкивания. Если линейная плотность пучка распределена по азимуту неравномерно и имеет максимумы, то частицы, находящиеся по ходу пучка впереди от максимума, будут ускоряться, а позади — замедляться силами отталкивания. В ускорителе, работающем выше критической энергии, относительная угловая скорость опережающих частиц при их ускорении уменьшается. Под воздействием сил отталкивания, вызываемых максимумом плотности, частицы как бы хотят приблизиться к этому максимуму («эффект отрицательной массы»). Таким образом, существование максимума продольной плотности приводит к его увеличению, что приближает предел появления поперечной неустойчивости. Если пучок не монохроматичен, то существование множества угловых скоростей препятствует концентрации частиц и тем самым мешает проявлению этого эффекта.

Возможность существования подобного механизма была изучена Максвеллом в 1890 г., когда он искал объяснение природы колец планеты Сатурн. Максвелл предложил гипотезу, по которой эти кольца состоят из частиц пыли. Условия движения в гравитационных полях планеты до некоторой степени подобны условиям движения в ускорителе при энергиях больше критической: угловая скорость понижается при увеличении энергии. Пылинки не отталкиваются друг от друга, как электрические заряды, напротив, они притягиваются гравитационными силами. Это и является причиной, по которой пыль образует стабильную систему, и Максвелл обратился к пылевой гипотезе для объяснения природы колец Сатурна.

Гипотеза существования аналогичного механизма в ускорителях была предложена Нильсоном, Сесслером и Саймоном в 1958—1959 гг. [63].

29.2. Уравнения движения

Рассматриваемая проблема касается только азимутального движения. Гамильтониан этого движения в присутствии пространственного заряда имеет вид

$$H(W, \varphi, t) = e\hat{V}_{вч}(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi_s - \pi h \left(f_{вч} \frac{df_{вч}}{dE} \right) W^2 - 2\pi h e U(\varphi, t); \quad B = \text{const.} \quad (29.1)$$

Это уравнение получено из уравнения (16.18), в котором опущен постоянный член и введен член, содержащий потенциальную энер-

гию $eU(\varphi, t)$ частиц, обусловленную действием пространственного заряда.

Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{W} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = e\hat{V}_{\text{вч}} (\sin \varphi - \varphi \sin \varphi_s) + 2\pi h e \frac{\partial U}{\partial \varphi}; \\ \dot{\varphi} &= +\frac{\partial H}{\partial W} = -2\pi h \left(f_{\text{вч}} \frac{df_{\text{вч}}}{dE} \right)_s W. \end{aligned} \right\} \quad (29.2)$$

В первом из этих уравнений член $e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi = (\Delta E)_{\text{об.вч}}$ равен приросту энергии одной частицы за оборот, приобретенному в результате высокочастотного ускоряющего напряжения.

Аналогично член, содержащий U , соответствует увеличению энергии за оборот $(\Delta E)'_{\text{об}}$ в результате действия на частицу азимутальных сил пространственного заряда

$$(\Delta E)'_{\text{об}} = -2\pi \operatorname{Re} \frac{\partial U}{\partial s} = 2\pi e h \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Рассмотрим лишь стационарный режим с постоянным магнитным полем, предполагая, что $\hat{V}_{\text{вч}} = \text{const}$, $f_{\text{вч}} = \text{const}$, $\sin \varphi_s = 0$. При этих условиях уравнения движения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{W} &= e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi + 2\pi h e \frac{\partial U(\varphi, t)}{\partial \varphi}; \\ \dot{\varphi} &= -2\pi h \left(f_{\text{вч}} \frac{df_{\text{вч}}}{dE} \right)_s W. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

29.3. Потенциал пространственного заряда

Потенциал U определяется линейной плотностью $\lambda(s)$ пучка.

Рассмотрим пучок круглого сечения радиусом a , который находится в центре цилиндрической вакуумной камеры с радиусом сечения A (рис. 50). Пусть $\lambda(s)$ — число заряженных частиц на единицу длины пучка $\Delta s = 1$ м. Предполагается также, что $\lambda(s)$ очень мало изменяется на участке длины пучка, имеющем величину порядка диаметра камеры $2A$:

$$\frac{2A}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} \ll 1. \quad (29.4)$$

Для этого случая распределение потенциала в азимутальной плоскости s будет таким же, какое вызывается однородной линейной плотностью, равной $\lambda(s)$.

Электрическое радиальное поле, вызываемое зарядами пучка,

$$E_r = \begin{cases} \frac{e\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2r}{a^2} & \text{для } 0 \leq r \leq a; \\ \frac{e\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2}{r} & \text{для } a \leq r \leq A. \end{cases} \quad (29.5)$$

Эти уравнения пригодны как для движущихся, так и для неподвижных зарядов. Магнитное поле, вызываемое движением зарядов пучка со скоростью βc ,

$$B_t = E_r \frac{\beta}{c}. \quad (29.6)$$

Сила действия этих собственных электрических и магнитных полей пучка на все частицы пучка имеет радиальную составляющую

$$f_r = e(E_r - \beta c B_t) = \frac{e E_r}{\gamma^2}. \quad (29.7)$$

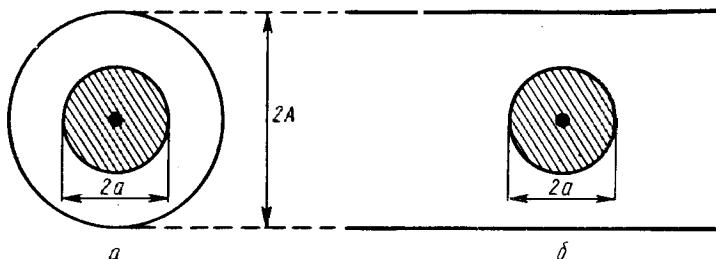


Рис. 50.

Работа, совершаемая частицей пучка с зарядом e и соответствующая виртуальному перемещению по радиусу камеры от стенки, имеющей нулевой потенциал, до центра камеры, равна

$$dU = - \int_A^0 f_r dr = \frac{e^2 \lambda}{4\pi \epsilon_0 \gamma^2} \left(1 + 2 \ln \frac{A}{a} \right).$$

Найденный таким образом потенциал можно записать в виде

$$U(s) = \frac{e\lambda(s)g}{4\pi\epsilon_0\gamma^2}; \quad g = \left(1 + 2 \ln \frac{A}{a} \right). \quad (29.8)$$

Для цилиндрического пучка радиусом a , движущегося в середине промежутка между двух проводящих плоскостей, расстояние между которыми равно $2A$ (рис. 50, б), можно найти $g = 1 + 2 \ln 4A/\pi a$.

29.4. Теорема Лиувилля

Так как азимутальное движение описывается гамильтонианом, то плотность ψ частиц в фазовой плоскости (W, φ) удовлетворяет теореме Лиувилля, т. е. имеет постоянную величину

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial W} \dot{W} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (29.9)$$

Теорема Лиувилля доказывается следующим образом.

Изменение сопряженных канонических переменных $p_k(t)$, $q_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$), являющихся координатами точки в шестимерном фазовом пространстве, определяет в этом пространстве компоненты скорости \dot{p} , \dot{q} ($k=1, 2, 3$). Фазовое пространство является евклидовым пространством с ортогональными осями. В этом пространстве закон сохранения количества вещества при движении выражается уравнением непрерывности, аналогичным уравнению непрерывности в гидродинамике:

$$\left. \begin{aligned} \text{Локальная производная } \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\psi \mathbf{v}); \\ \text{Полная производная } \frac{d\psi}{dt} &= -\psi \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (29.10a)$$

С учетом того, что

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \text{и} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (29.10b)$$

имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_k \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\psi}{dt} \equiv 0, \quad (29.11)$$

что и требовалось доказать.

29.5. Уравнение распределения

Здесь рассматривается только частный случай постоянной плотности частиц на фазовой плоскости (W , φ):

$$\psi(W, \varphi) = \operatorname{const} = \sigma, \quad (29.12)$$

в области, ограниченной линиями $W_1(\varphi, t)$ и $W_2(\varphi, t)$, в то время как вне этой области $\psi = 0$.

При инжекции обычно имеют место такие условия, при которых $W_1 = -W_2 = \operatorname{const}$. Так как плотность постоянна, то изменение распределения полностью определяется изменением пограничных линий $W_1(\varphi, t)$ и $W_2(\varphi, t)$. Линейная плотность λ в действительном пространстве выражается через σ , W_1 и W_2 :

$$\lambda = \frac{\sigma h}{R} (W_2 - W_1). \quad (29.13)$$

Это дает с учетом уравнений (29.8)

$$U = \frac{eh\sigma g}{4\pi\epsilon_0 R \gamma^2} (W_2 - W_1). \quad (29.14)$$

Уравнения движения (29.3) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi - K \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_2 - W_1); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= MW, \end{aligned} \right\} \quad (29.15)$$

где

$$K = \frac{-e^2 h^2 \sigma g}{2\epsilon_0 R \gamma^2}; \quad M = -2\pi h \left(f_{\text{вч}} \frac{df_{\text{вч}}}{dE} \right)_s. \quad (29.16)$$

Изменение границ характеризуется частными производными $\partial W_1 / \partial t$ и $\partial W_2 / \partial t$. Используя соотношения

$$\frac{dW(\varphi, t)}{dt} = \frac{\partial W(\varphi, t)}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial W(\varphi, t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{dW}{dt} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

с учетом уравнений (29.15) для границ получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial t} &= e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi - K \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_2 - W_1) - MW_1 \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial W_2}{\partial t} &= e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi - K \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_2 - W_1) - MW_2 \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (29.17)$$

Далее вводим разность и среднее значение

$$\Delta = W_2 - W_1; \quad \bar{W} = \frac{W_2 + W_1}{2}, \quad (29.18)$$

для которых получаются сложением и вычитанием уравнений (29.17) выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{W} \Delta) &= 0; \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + K \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} + \frac{M}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{W}^2 + \frac{\Delta^2}{4} \right) &= e\hat{V}_{\text{вч}} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (29.19)$$

29.6. Интеграл уравнения распределения и устойчивость

В этом разделе рассматриваются условия устойчивости распределения линейной плотности пучка λ_s , которая пропорциональна Δ . Эта задача состоит из двух вопросов:

1) существует ли стационарное распределение; 2) если такое распределение существует, то как оно изменяется под воздействием малого возмущения.

Если малое начальное возмущение сопровождается колебаниями около стационарного распределения, то пучок устойчив. В противоположном случае пучок неустойчив.

Линеаризация возмущенных уравнений, естественно, позволяет судить только о начальной устойчивости некоторых типов распределений.

Сначала исследуется стационарное распределение Δ_0 , \bar{W}_0 , удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial t} \equiv 0; \quad \frac{\partial \bar{W}_0}{\partial t} \equiv 0. \quad (29.20)$$

Для Δ_0 , пропорциональных $\lambda \neq 0$, невозможно удовлетворить одновременно условиям (29.20) и (29.19), если, кроме того, имеется условие

$$\bar{W}_0 \equiv 0. \quad (29.21)$$

Поэтому уравнения (29.19) переходят в одно уравнение для Δ_0 ,

$$K \frac{\partial \Delta_0}{\partial \varphi} + \frac{M}{8} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta_0^2) = e \hat{V}_{вч} \bar{c} \sin \varphi. \quad (29.22)$$

Теперь рассмотрим возмущенное распределение Δ , незначительно отличающееся от Δ_0 , и исследуем условия, при которых Δ остается конечным. Распределение Δ удовлетворяет в соответствии с уравнениями (29.19) соотношению

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = -M \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Delta \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{W} \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right).$$

При условии (29.21) для случая слабых возмущений можно пренебречь малой величиной $\bar{W} \frac{\partial \Delta}{\partial t} \ll \Delta \frac{\partial \bar{W}}{\partial t}$. Кроме того, $\partial^2 \Delta_0 / \partial t^2 = 0$.

Вследствие этого в первом приближении

$$\frac{\partial^2 (\Delta - \Delta_0)}{\partial t^2} = -M \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\Delta \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right). \quad (29.23)$$

В этом уравнении можно выразить $\partial \bar{W} / \partial t$ через $(\Delta - \Delta_0)$. Если в уравнениях (29.19) пренебречь $\bar{W}^2 \ll \Delta^2 / 4$ и, кроме этого, вычтуть уравнение (29.22) из второго уравнения (29.19), то, учитывая, что в первом приближении $\Delta^2 - \Delta_0^2 = 2\Delta_0 \times (\Delta - \Delta_0)$, получаем

$$-\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta - \Delta_0) + \frac{M}{8} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta^2 - \Delta_0^2). \quad (29.24)$$

Подставив уравнение (29.24) в уравнение (29.23), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta - \Delta_0) &= M \Delta_0 K \frac{\partial^2 (\Delta - \Delta_0)}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{4} M^2 \Delta_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [\Delta_0 (\Delta - \Delta_0)]. \end{aligned} \quad (29.25)$$

Ограничим рассмотрение этого уравнения случаем, при котором отсутствует высокочастотное ускоряющее напряжение, т. е. когда

$\dot{V}_{Вч} = 0$. Для этого случая интеграл уравнения (29.22) будет $\Delta_0 = \text{const}$, что соответствует азимутально однородному распределению. Уравнение (29.25) для распределения, незначительно отличающегося от Δ_0 , сводится к классическому волновому уравнению с решением

$$\Delta(\varphi, t) = F(\varphi + \omega t). \quad (29.26)$$

Для первой гармоники ($h = 1$) переменная φ с точностью до знака совпадает с азимутом, измеренным в системе, вращающейся вместе с пучком; ω — угловая скорость распространения волны (относительно движущегося пучка).

Подставляя решение (29.26) в уравнение (29.25), можно показать, что

$$\omega = \pm \left[M\Delta_0 \left(K + \frac{1}{4} M\Delta_0 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (29.27)$$

Исключая K и M [см. формулу (29.16)] и подставляя

$$\Delta_0 = \frac{\Delta E}{f} = 2\pi \frac{\Delta E}{\omega}; \quad \sigma = \frac{\lambda_0 R}{h\Delta_0}; \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_0 c^2} = r_0,$$

получаем

$$\omega = \pm \omega \left[\frac{g\lambda r_0}{\gamma^3 \beta^2} \eta + \frac{\eta^2}{4\beta^4} \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (29.28)$$

Если ω — действительная величина, то существует бегущая волна; если ω — мнимая, то Δ экспоненциально нарастает. Величина ω всегда действительна для энергий ниже критической, так как в этом диапазоне $\eta > 0$. Выше критической энергии $\eta < 0$ и колебания могут стать неустойчивыми.

Таким образом, критерий устойчивости имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 > \frac{4g\lambda\beta^2 r_0}{(-\eta)\gamma^3}, \quad (29.29)$$

где ΔE — полная ширина энергетического разброса.

Если колебание неустойчиво, то решение (29.26) удобно представить в виде суммы членов, имеющих вид $e^{\pm in(\varphi + \omega t)}$, причем постоянные времени нарастания для монохроматического пучка

$$T_n = \frac{1}{n\omega} = \frac{1}{n\omega} \left[\frac{\gamma^3 \beta^2}{g\lambda r_0 \eta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (29.30)$$

На экспериментальном ускорителе электронов на 40 Мэв (FFAG, MURA) было обнаружено, что $T_n(n)$ стремится к ограниченной величине, соответствующей $n \approx 100$.

Сравнительно новая теория, позволяющая учесть проводимость стенок, указывает на возможность возникновения, правда, с мень-

шей вероятностью, неустойчивости и при энергиях, меньших критической [62, [64].

Стабилизация неустойчивости при разбросе по энергиям является еще одним примером действия уже упоминавшегося затухания Ландау.

Глава 30

ПОТЕРИ, ВЫЗВАННЫЕ СОУДАРЕНИЯМИ ЧАСТИЦ ПУЧКА (эффект Тушека)

Описанный здесь механизм потерь наблюдался франко-итальянской группой в лаборатории линейного ускорителя в Орсе (Франция) в 1963 г. на малой модели (ADA) накопительного кольца для электронов и позитронов с энергией 250 Мэв. Этот эффект был тогда же объяснен Тушеком. Наше изложение теории очень близко следует ее трактовке в работе [66].

30.1. Эффективное сечение потерь

В системе координат, связанной с пучком, частицы пучка совершают колебания в направлении, перпендикулярном к направлению движения пучка. Пусть радиальные составляющие скорости электронов равны v_i, v_k, \dots , а относительная скорость перемещения двух электронов (i) и (k) относительно друг друга $v = (v_i - v_k)$. Предполагаем, что радиальные скорости нерелятивистские. Пусть $q m_0 c$ — импульс каждого электрона в системе центра масс пары электронов. Тогда

$$q = 1/2 [(p_x)_i - (p_x)_k] = 1/2 v/c. \quad (30.1)$$

Все импульсы частиц выражаются в безразмерных величинах, получаемых делением импульсов на $m_0 c$, т. е. в долях $m_0 c$.

При упругом столкновении частица отклоняется таким образом, что между направлениями движения частицы и пучка возникает угол χ (рис. 51) и появляется составляющая импульса в направлении движения пучка, равная $q \cos \chi$. В лабораторной системе координат эта продольная составляющая равняется $\gamma q \cos \chi$.

Пусть $m_0 c \Delta p_{ВЧ} > 0$ — максимальное отклонение полного импульса относительно синхронной частицы, существующее внутри высокочастотной сепаратрисы. Тогда

$$\frac{\Delta p_{ВЧ}}{p_0} = \frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma} = \sqrt{\frac{2e \hat{V}_{ВЧ}}{\pi h \alpha E}}, \quad (30.2)$$

где $m_0 c p_0 = m c \gamma$ — полный импульс синхронной частицы. Отклоненный электрон будет потерян, если $\gamma/q \cos \chi > \Delta p_{ВЧ}$, т. е. если

$$|\cos \chi| > \frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma |q|} = \mu. \quad (30.3)$$

Далее подсчитывается сечение потерь σ , соответствующее $|\cos\chi| > \mu$. Эффективное дифференциальное сечение упругого соударения зависит от относительной скорости электронов v . Эффективное сечение при отклонении на угол θ в нерелятивистском случае, согласно Мёллеру, равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{r_0^2 c^4}{v^4} \left[\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} \right] = \\ &= \frac{4r_0^2 c^4}{v^4} \left[\frac{4}{\sin^4\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta} \right]. \end{aligned} \quad (30.4)$$

Если φ — азимут отклоненной частицы и χ — угол между скоростью отклоненной частицы и направлением движения пучка

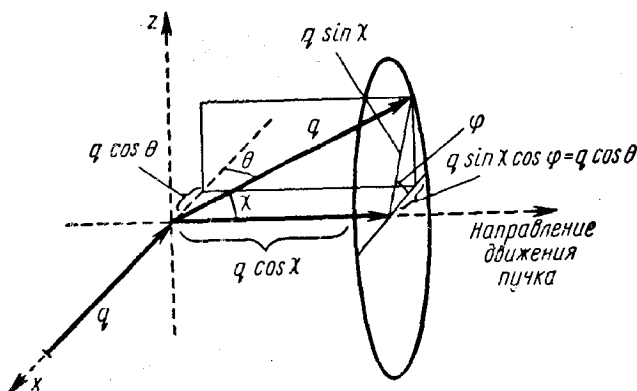


Рис. 51.

(рис. 51), то $\cos\theta = \sin\chi \cos\varphi$; $d\Omega = \sin\chi d\chi d\varphi$. Полное эффективное сечение потерь

$$\sigma = \frac{4r_0^2 c^4}{v^4} \int_0^{\arccos \mu} \sin\chi d\chi \cdot 2 \int_0^\pi d\varphi \left[\frac{4}{(1 - \sin^2\chi \cos^2\varphi)^2} - \frac{3}{(1 - \sin^2\chi \cos^2\varphi)} \right].$$

Множитель «2» появился потому, что φ под интегралом изменяется только от 0 до π .

Выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} v\sigma &= \frac{8\pi r_0^2 c^4}{v^3} \left[\frac{1}{\mu^2} - 1 + \ln \mu \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi r_0^2 c}{q^3} \left[\frac{1}{\mu^2(q)} - 1 + \ln \mu(g) \right] & \text{для } q \geq \frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma}, \\ 0 & \text{для } q \leq \frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma}. \end{cases} \end{aligned} \quad (30.5)$$

30.2. Среднее значение $\overline{v\sigma}$ (в системе координат S)

Радиальные составляющие импульса p_x имеют гауссово распределение со среднеквадратичным отклонением

$$\delta p_x = p_0 \frac{\delta \chi_\beta}{\lambda_x},$$

где p_0 — полный импульс; $\delta \chi_\beta$ — среднеквадратичная величина радиальных бетатронных колебаний частиц; $2\pi\lambda_x$ — длина волны радиальных бетатронных колебаний.

Импульсы электронов в системе центра инерции каждой пары удовлетворяют соотношению (30.1) и имеют гауссово распределение со среднеквадратичным отклонением

$$\delta q = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta p_x. \quad (30.6)$$

Функция распределения q , следовательно, равна

$$P(q) dq = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta q} e^{-\frac{q^2}{2(\delta q)^2}} \cdot dq = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta p_x} e^{-\frac{q^2}{(\delta p_x)^2}} dq. \quad (30.7)$$

Величина $v\sigma$, являющаяся функцией q , с учетом соотношений (30.4) имеет среднее значение

$$\overline{v\sigma} = 2 \int_{\frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma}}^{\infty} P v \sigma dq. \quad (30.8)$$

Множитель «2» появляется здесь потому, что интеграл вычисляется только для положительных q , а вероятность P нормирована на интервале q от $-\infty$ до $+\infty$.

Средняя величина $\overline{v\sigma}$ с учетом формул (30.4) и (30.7)

$$\overline{v\sigma} = 2\pi r_0^2 c \int_{\frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma}}^{\infty} \frac{1}{q^3} \left[\left(\frac{\gamma q}{\Delta p_{ВЧ}} \right)^2 - 1/2 \ln \left(\frac{\gamma q}{\Delta p_{ВЧ}} \right)^2 - 1 \right] e^{-\frac{q^2}{(\delta p_x)^2}} \frac{dq}{\sqrt{\pi}\delta p_x}.$$

Если ввести переменные

$$u = \left(\frac{q}{\delta p_x} \right)^2; \quad \varepsilon = \left(\frac{\Delta p_{ВЧ}}{\gamma \delta p_x} \right)^2, \quad (30.9)$$

то предыдущее выражение принимает вид

$$\overline{v\sigma} = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 c}{(\delta p_x)^3} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{u^2} \left(\frac{u}{\varepsilon} - 1/2 \ln \frac{u}{\varepsilon} - 1 \right) e^{-u} du = \frac{\sqrt{\pi} r_0^2 c \gamma^2}{\delta p_x (\Delta p_{ВЧ})^2} C(\varepsilon), \quad (30.10)$$

где

$$C(\varepsilon) = -\frac{3}{2}e^{-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\ln u}{u} e^{-u} du + \\ + 1/2 (3\varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon + 2) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (30.11)$$

Если $\varepsilon \ll 1$, то выражение (30.11) можно упростить. Первое слагаемое (30.11) при малых ε равно $-\frac{3}{2}$. Вторым членом в (30.11) можно пренебречь, так как он стремится к нулю вместе

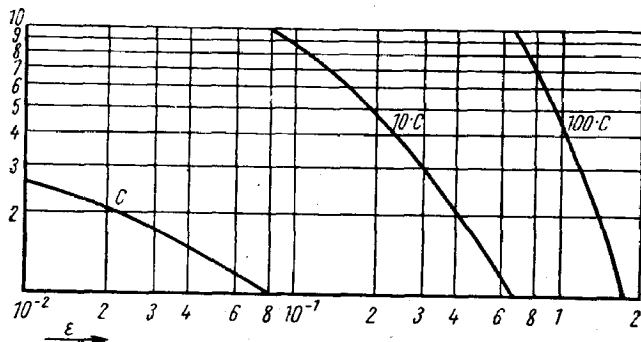


Рис. 52.

с ε . Действительно, разобьем область интегрирования на две части: $\frac{\varepsilon}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\varepsilon}^A + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{\infty}$, где A — конечная величина. Так как интеграл \int_A^{∞} конечен, то $\frac{\varepsilon}{2} \int_A^{\infty} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбрав $A \lesssim 1$ и производя интегрирование, получим

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{\varepsilon}^A \frac{\ln u}{u} e^{-u} \approx \frac{\ln u}{u}; \quad \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{\infty} = \frac{\varepsilon}{4} \ln^2 \frac{A}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (30.12)$$

В третьем члене (30.11) коэффициент $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -Ei(-\varepsilon)$ для $\varepsilon \ll 1$ равняется $\ln(1/\gamma_e \varepsilon)$, где $\gamma_e = 1,78 = C_e$ — константа Эйлера*.

* В отечественной литературе принято называть эйлеровой постоянной число $C = 0,5772\dots$, связанное с C_e соотношением $C = \ln C_e$ (см., например, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 2. М.-Л. 1948, ОГИЗ, Гос. изд. техн. теор. лит.-ры. — Прим. ред.

Итак, третий член равен $1/2(3\epsilon - \epsilon \ln \epsilon + 2) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \approx \ln \frac{1}{\gamma \epsilon}$,

а сумма трех членов (30.11) равна в первом приближении

$$C(\epsilon) = \ln \frac{1}{\gamma \epsilon} - \frac{3}{2}. \quad (30.13)$$

Это приближение можно использовать при $\epsilon < 10^{-2}$. Для больших величин функция $C(\epsilon)$ представлена на рис. 52.

30.3. Время жизни частиц

Элемент объема dV в системе координат S содержит dN электронов, которые теряются со скоростью $\dot{dN} = \overline{v\sigma} dN = \overline{v\sigma} \rho^2 dV$, где $\rho = dN/dV$ — плотность электронов. Для всего сгустка пучка P , сгруппированного высокочастотным ускоряющим напряжением, скорость потерь $\dot{N}_p = \int_P \overline{v\sigma} \rho^2 dV$. Считая, что $\overline{v\sigma}$ не зависит от координат, получаем

$$\dot{N}_p = \overline{v\sigma} \int_P \rho^2 dV.$$

Время жизни τ в системе S выражается формулой

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\dot{N}_p}{N_p} = \frac{\overline{v\sigma}}{N_p} \int_P \rho^2 dV.$$

Разделив на γ , получим время жизни в лабораторной системе координат:

$$\frac{1}{\tau_L} = \frac{1}{\gamma N_p} \left(\overline{v\sigma} \int_P \rho^2 dV \right)_S. \quad (30.14)$$

Интеграл $\int_P \rho^2 dV$ удобно вычислить в лабораторной системе координат, в которой распределение плотности имеет вид

$$\rho_L = \frac{N_p}{(2\pi)^{3/2} \delta x \delta z \delta l} e^{-\left[\frac{x^2}{2(\delta x)^2} + \frac{z^2}{2(\delta z)^2} + \frac{l^2}{2(\delta l)^2} \right]},$$

где $dx = \sqrt{(\delta x_s)^2 + (\delta x_s)^2}$.

Вычисление интеграла (30.14) дает

$$\left(\int_P \rho^2 dV \right)_L = \frac{N_p^2}{(4\pi)^{3/2} \delta x \delta z \delta l} = \frac{N_p^2}{(V_p)_L},$$

где введен объем

$$(V_p)_L = (4\pi)^{3/2} \delta x \delta z \delta l. \quad (30.15)$$

В системе центра инерции S

$$\left(\int \rho^2 dV \right)_s = \frac{1}{\gamma} \frac{N_p^2}{(V_p)_L}. \quad (30.16)$$

Подставляя формулы (30.10) и (30.16) в выражение (30.14), получим в лабораторной системе координат

$$\frac{1}{\tau} = \frac{V \pi r_0^2 c N}{\delta p_x (\Delta p_{ВЧ})^2 h V_p} C(\epsilon), \quad (30.17)$$

где $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м; $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек; N — полное число частиц в пучке; $m_0 c \delta p_x$ — среднеквадратичное значение радиальных импульсов; $m_0 c \Delta p_{ВЧ}$ — ширина сепаратрисы высокочастотного ускоряющего поля; h — кратность частоты ускоряющего поля; V_p — объем сгустка; $\epsilon = \left(\frac{\Delta p_{ВЧ}}{\delta p_x} \right)^2$, $C(\epsilon)$ — функция, определяемая формулами (30.11) и (30.13) и графиком рис. 52.

Модель ADA имеет следующие параметры: $R \approx \rho = 0,58$ м; $v_x = 0,7$; $h = 2$; $\dot{V}_{ВЧ} = 5 \cdot 10^3$ в. Для энергии $E = 188$ Мэв и $N = 10^7$ наблюдаемое время существования пучка равно 6,4 ч (после исключения влияния остаточного газа). Это время существования приблизительно в 50 раз превосходит время, вычисленное по формуле (30.17) для нормального объема пучка. Объяснить эту разницу можно, вероятно, тем, что действительная толщина пучка δz примерно в 50 раз больше расчетной ($\delta z / \delta x \approx 75/1750$) из-за связи двух различных мод бегатронных колебаний. С учетом этого обстоятельства наблюдаемое время жизни как функция энергии хорошо удовлетворяет формуле (30.17) для больших энергий, как это показано на рис. 54.

Для малых энергий следует учитывать увеличение размеров пучка из-за многократных соударений частиц без потерь. В настоящем разделе этим эффектом пренебрегали, но он будет рассмотрен в следующей главе.

Глава 31

УВЕЛИЧЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПУЧКА ВСЛЕДСТВИЕ МНОГОКРАТНЫХ ВНУТРЕННИХ СОУДАРЕНИЙ

В этой главе использованы следующие обозначения: p_s — импульс, передаваемый в азимутальном направлении при соударении; ρ — концентрация (или плотность) электронов; σ — эффективное сечение соударения; $2u$ — относительная радиальная скорость

пары электронов; u — радиальная скорость каждого из этих двух электронов в системе их центра инерции; $q = m_0 u = \frac{p_0}{c} u$; p_r — радиальная составляющая импульса; $\delta p_r = \sqrt{2\delta q}$; p_\perp — составляющая импульса в направлении, перпендикулярном к радиальному; b — параметр соударения (прицельное расстояние);

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_0 c^2}; \quad p_0 = m_0 c.$$

Следует обратить внимание на некоторое отличие в обозначениях, используемых в этой главе, по сравнению с обозначениями предыдущих глав. Бетатронные колебания приводят к увеличению тепловой энергии пучка. Частицы обмениваются энергией посредством кулоновского взаимодействия. При соударении двух частиц часть кинетической энергии поперечного движения преобразуется в энергию продольного движения пучка. Если это изменение энергии значительно, то оно приводит к потере частиц. Этот эффект Тушека уже рассмотрен в предыдущей главе.

В этой главе рассматриваем слабые соударения, не приводящие к потерям: случайные изменения энергии в результате соударений возбуждают бетатронные и синхронные колебания, в результате которых размеры пучка увеличиваются.

Увеличение размеров пучка приводит также и к дополнительным потерям частиц, но ими обычно можно пренебречь. Задача об увеличении размеров пучка, а также задача о случайных потерях частиц вследствие многократных соударений решаются с помощью двух соотношений, которые были получены в предыдущих главах.

Пусть имеется затухающее колебание

$$a = \hat{a} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t, \quad (31.1)$$

амплитуда которого может внезапно получать случайные приращения $\pm \delta a$, повторяющиеся со средним темпом n . В этом случае, как показано в гл. 23, амплитуда колебаний имеет гауссово распределение с дисперсией

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{2} n (\overline{\delta a^2}) \tau. \quad (31.1a)$$

Примем также, что осцилляторы, амплитуда колебаний которых достигает величины $\hat{a} \geq A$, устраняются. Тогда скорость потерь осцилляторов определяется постоянной времени (см. гл. 26):

$$\frac{T}{\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} e^r, \quad (31.2)$$

где $r = \left(\frac{A}{\sigma_a}\right)^2$.

В рассматриваемом случае многократные соударения, частота которых равна n , будут изменять энергию частиц на величину, средний квадрат которой равен $\overline{\epsilon_c^2}$:

$$[\delta(E - E_s)]_c^2 = (\delta E)_c^2 = \frac{1}{4} n \overline{\epsilon_c^2} \tau_s. \quad (31.3)$$

Предельный разброс по энергиям, при которых еще сохраняется устойчивость,

$$E - E_s|_{\text{ВЧ}} = \Delta E_{\text{ВЧ}} = \pm \sqrt{\frac{2e\hat{V}_{\text{ВЧ}} E}{\pi h \alpha}}. \quad (31.4)$$

Длительность существования частиц, определяемую их диффузией за этот предел, можно найти с помощью уравнения (31.2), подставляя

$$\left. \begin{aligned} r &= (\Delta E_{\text{ВЧ}} / \delta E)^2; \quad \tau = \tau_s; \\ (\delta E)^2 &= (\delta E)_c^2 + (\delta E)_\gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (31.5)$$

где $(\delta E)_\gamma = \frac{1}{4} N \epsilon_\gamma^2 \tau_s$ — среднеквадратичное отклонение энергии, обусловленное квантовой природой испускаемого света. Обе дисперсии складываются, потому что они относятся к статистически независимым событиям.

Возвращаясь к задаче об увеличении размеров пучка, введем в уравнение (31.3) вместо энергий импульсы: $n\overline{\epsilon^2} = c^2 \overline{np_s^2}$. Пусть $\overline{p_s^2}$ — средний квадрат поперечного импульса, передаваемого при соударении, усредненный по всем значениям параметра соударений b , но для одной определенной относительной радиальной скорости u электронов: $\overline{p_s^2} = \overline{p_s^2}(u)$. Усредняя по всем радиальным скоростям u , получим

$$\overline{np_s^2} = \overline{\rho \sigma u p_s^2}$$

и, таким образом,

$$(\delta E)_c^2 = \frac{1}{4} c^2 \overline{\rho \sigma u p_s^2} \tau_s. \quad (31.6)$$

Предполагается, что распределение частиц по скоростям u , так же как и по плотности ρ , не зависит от местоположения и что

$$\rho = \overline{\rho} = \iiint \rho \rho dV / \iiint \rho dV = \frac{N}{h^2 \pi^{3/2} \sigma_x \sigma_z \sigma_l}, \quad (31.7)$$

где $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_l$ зависят от распределения по энергиям.

Увеличение энергии возбуждает одновременно синхротронные и бетатронные колебания со среднеквадратичными отклонениями,

равными соответственно

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xs} &= R\alpha (\delta E/E); \\ \sigma_{x\beta} &= \sigma_{xs} \sqrt{\tau_x/\tau_s}; \\ \sigma_x &= \sqrt{\sigma_{xs}^2 + \sigma_{s\beta}^2} = R\alpha \frac{\delta E}{E} \sqrt{1 + \frac{\tau_x}{\tau_s}}. \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

Многочисленные соударения возбуждают также и вертикальные бетатронные колебания. В системе центра инерции передача энергии в вертикальном и продольном направлениях в среднем одинакова. При обратном преобразовании в лабораторную систему координат энергия вертикального движения становится очень малой. Можно показать, что

$$\sigma_z = \frac{1}{\gamma} \frac{\sigma_{x\beta}}{v_z \alpha} \sqrt{\frac{\tau_z}{\tau_x}}.$$

Практически в вертикальном движении определяющей является передача энергии между вертикальным и горизонтальным движением. В соответствии с этим в расчетах используется величина

$$\sigma_z = \chi \sigma_{x\beta} = \chi \sqrt{\frac{\tau_x}{\tau_s}} R\alpha \frac{\delta E}{E}, \quad (31.9)$$

где χ — коэффициент связи, который в примере, приведенном выше для малых накопительных колец ADA, по-видимому, имеет величину порядка 1/20.

Используя приближенные соотношения $\sigma_l = (\alpha c/\Omega) (\delta E/E)$, $\Omega = (c/R) (h\alpha e \hat{V}_{ВЧ}/2\pi E)^{1/2}$, а также в соответствии с формулой (31.4)

$$\sigma_l = \frac{2R\delta E}{h\Delta E_{ВЧ}}. \quad (31.10)$$

Соотношение (31.7) можно записать в виде

$$\rho = \frac{NE^2 (\Delta E_{ВЧ})}{2^4 \pi^{3/2} R^3 (\delta E)^3 \alpha^2 \chi \sqrt{\frac{\tau_x}{\tau_s} \left(\frac{\tau_x}{\tau_s} + 1 \right)}}, \quad (31.11)$$

а соотношение (31.6)

$$(\delta E)_c^2 = \frac{c^2 NE^2 (\Delta E_{ВЧ}) \tau_s \overline{\sigma_{\mu p_s}^2}}{2^6 \pi^{3/2} \alpha^2 \chi \sqrt{\frac{\tau_x}{\tau_s} \left(\frac{\tau_x}{\tau_s} + 1 \right)} R^3 (\delta E)^3}. \quad (31.12)$$

Передача импульсов. Рассмотрим передачу импульса сначала в собственной системе координат пучка, в которой скорость электронов практически имеет только радиальную составляющую. Кроме того, будем использовать классическое приближение для кулоновского взаимодействия при малых углах рассеяния. Исходя из формулы Мёллера (30.5), можно получить те же результаты.

В классическом приближении при соударении двух электронов каждый из них получает импульс p_{\perp} в направлении, перпендикуляр-

ном к их первоначальному радиальному направлению:

$$p_{\perp} = \frac{2r_0 p_0^2}{bq}. \quad (31.13)$$

Здесь $p_0 = m_0 c$, так как q — радиальный «относительный» импульс. Соударению соответствует дифференциальное эффективное сечение $d\sigma = 2\pi b db$, откуда

$$\frac{d\sigma}{dp_{\perp}} = \frac{d\sigma}{db} \cdot \frac{db}{dp_{\perp}} = -2\pi \left(\frac{2r_0 p_0^2}{q} \right) \frac{1}{p_{\perp}^3}.$$

Усредняя, получаем далее

$$\begin{aligned} \overline{p_{\perp}^2} &= \frac{\int p_{\perp}^2 d\sigma}{\int d\sigma} = \frac{1}{\sigma} \int p_{\perp}^2 d\sigma; \\ \sigma p_{\perp}^2 &= 2\pi (2r_0 p_0^2)^2 \frac{1}{q^2} \ln \frac{(p_{\perp})_M}{(p_{\perp})_m}. \end{aligned} \quad (31.14)$$

Если радиальный относительный импульс перед столкновением равен q , то при столкновении не может быть передан импульс, больший, чем

$$(p_{\perp})_M = q, \quad (31.15)$$

и меньший, чем [см. формулу (31.13)]

$$(p_{\perp})_m = \frac{2r_0 p_0^2}{b_M q}.$$

Следовательно,

$$\frac{(p_{\perp})_M}{(p_{\perp})_m} = \frac{b_M q^2}{2r_0 p_0^2} = \left(\frac{q}{q_0} \right)^2.$$

Вводя обозначение

$$q_0 = p_0 \sqrt{\frac{2r_0}{b_M}}, \quad (31.16)$$

получаем

$$\frac{(p_{\perp})_M}{(p_{\perp})_m} = \left(\frac{q}{q_0} \right)^2; \quad (31.17)$$

$$\sigma p_{\perp}^2 = 2\pi (2r_0 p_0^2)^2 \frac{1}{q^2} \ln \left(\frac{q}{q_0} \right)^2. \quad (31.18)$$

Взаимодействие двух частиц происходит не мгновенно, а на длине порядка прицельного расстояния. Учитываем также, что имеет смысл рассматривать только те взаимодействия частиц, для которых

$$b \lesssim b_M \approx \rho^{-1/3}. \quad (31.19)$$

Следовательно,

$$q_0 = 2^{1/2} p_0 r_0^{1/2} \rho^{1/6} \quad (31.20)$$

Импульс p_{\perp} имеет равновероятные составляющие p_s и p_z . Для азимутальной составляющей имеем

$$\overline{p_s^2} = \frac{1}{2} \overline{p_{\perp}^2}. \quad (31.21)$$

Импульс q и относительная радиальная скорость u связаны соотношением

$$q = \frac{p_0}{c} u. \quad (31.22)$$

Распределение радиальных импульсов $q \geq 0$ имеет вид

$$P(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta p_r} e^{-\frac{q^2}{(\delta p_r)^2}}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{где} \\ \sqrt{2} \delta q = \delta p_r = \gamma p_0 \frac{\sigma_{x\beta}}{\lambda_x} \end{array} \right\} \quad (31.23)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{u \sigma p_s^2} &= \frac{1}{2} \overline{u \sigma p_{\perp}^2} = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} u \sigma p_{\perp}^2 P(q) dq = \\ &= \frac{4c \sqrt{\pi} r_0^2 p_0^3}{\delta p_r} f(q_0) = \frac{4 \sqrt{\pi} r_0^2 E_0^3}{c \alpha \sqrt{\tau_x / \tau_s} v_x \delta E} f(q_0), \end{aligned} \quad (31.24)$$

где

$$\begin{aligned} f(q_0) &= 2 \int_{q_0}^{\infty} \frac{1}{q} e^{-\left(\frac{q}{\delta p_r}\right)^2} \ln \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 dq = \\ &= \int_{X_m}^{\infty} \frac{1}{X} e^{-X} \ln \frac{X}{X_m} dX = f(X_m) \end{aligned} \quad (31.25)$$

и

$$X_m = \left(\frac{q_0}{\delta p_r}\right)^2. \quad (31.26)$$

Результаты вычисления интеграла (31.25) приведены на рис. 53. Подставляя из формул (31.20) и (31.11) выражения для q_0 и ρ , из формул (31.23) и (31.8) — выражения для δp_r и $\delta_{x\beta}$, можно найти

$$X_m = \frac{r_0 E_0^{8/3} (\Delta E_{\text{ВЧ}})^{1/3} \gamma^{2/3} N^{1/3}}{2^{1/3} \pi^{1/2} R \alpha^{8/3} (1 + \tau_x / \tau_s)^{1/6} (\tau_x / \tau_s)^{7/6} v_x \chi^{1/3} [(\delta E)_c^2 + (\delta E)_v^2]^{3/2}}. \quad (31.27)$$

Верхний предел интеграла для $f(X_m)$ может быть принят равным бесконечности, так как в большинстве случаев потери в результате однократного соударения редки по сравнению с многократными соударениями без потерь.

При переходе из собственной системы координат S в лабораторную систему L величины

$$\overline{(\sigma \mu p_s^2)}_L = \overline{(\sigma \mu p_r^2)}_S \quad (31.28)$$

являются инвариантами, причем $\sigma_L = \sigma_S \gamma^{-1}$; $u_L = u_S \gamma^{-1}$; $(p_s)_L = (p_s)_S \gamma^{-1}$. Подставляя выражение (31.24) в формулу (31.12), получим окончательно

$$(\delta E)_c^2 [(\delta E)_c^2 + (\delta E)_\gamma^2]^2 = \frac{cN\gamma^2 (\Delta E_{вч}) \tau_s r_0^2 E_0^5}{2^4 \pi R^3 \alpha^3 \chi v_x \frac{\tau_x}{\tau_s} \sqrt{1 + \frac{\tau_x}{\tau_s}}} f(X_m). \quad (31.29)$$

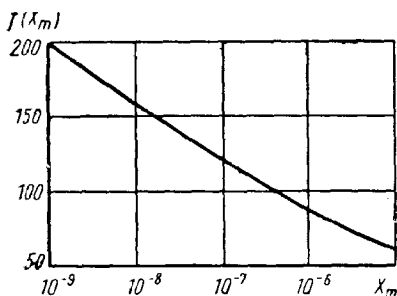


Рис. 53.

Обозначим $(\delta E)_c^2 = x$; $(\delta E)_\gamma^2 = y$. Тогда уравнения (31.27) и (31.29) образуют систему двух уравнений вида

$$x(x+y)^2 = Af(X_m); \quad (x+y)^{3/2} = B/X_m. \quad (31.30)$$

Так как $y = (\delta E)_\gamma^2$ известно [см. формулу (25.49)], то отсюда найдем x , предварительно вычислив X_m из уравнения

$$f(X_m) = \frac{1}{A} \left[\left(\frac{B}{X_m} \right)^2 - y \left(\frac{B}{X_m} \right)^{4/3} \right]. \quad (31.31)$$

Численный пример

Применим эту теорию для модели накопительных колец ADA, параметры которой были приведены в предыдущей главе. Число частиц в рассматриваемом пучке $N = 10^6$. Энергия частиц характеризуется величиной γ . Ниже приведены теоретическая величина $(\delta_x)_\gamma$ пучка, вычисленная вначале только с учетом влияния излучения на размер пучка, и теоретическая величина σ_x , которая вы-

числяется не только с учетом влияния излучения, но и с учетом многократных соударений.

Некоторые параметры установки ADA при $N = 10^6$

γ	100	150	200	250	300	350
$10^4 \times (\sigma_x)_\gamma, \text{ м}$	1,25	1,87	2,5	3,12	3,75	4,38
$10^4 \times \tau_x, \text{ м}$	3,82	2,74	2,65	3,15	3,76	4,40

Как и следовало ожидать, при малых энергиях, характеризуемых слабым излучением, размер пучка определяется многократными соударениями.

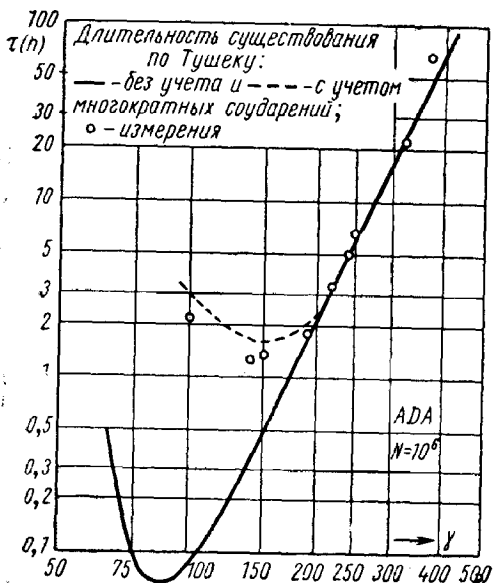


Рис. 54.

Прямые измерения размеров пучка не были проведены. Однако возможна проверка теории многократных соударений косвенным способом, посредством исследования потерь частиц вследствие простых соударений (эффект Тушека), которые зависят от размеров пучка. На рис. 54 представлена зависимость длительности существования по Тушкеву от энергии частиц для модели ADA. На графике нанесены экспериментально измеренные точки длительности существования и две теоретические кривые. Одна (сплошная) вычислена в предположении, что размер пучка $(\sigma_x)_\gamma$ определяется только излучением, вторая (пунктирная) вычислена для размеров пучка σ_x , определяемых одновременно излучением и многократными соударениями. Вторая (пунктирная) кривая хорошо совпадает с измерениями. Она дает убедительное доказательство правильности теории как эффекта Тушека, так и влияния многократных соударений.

Глава 32

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СТАБИЛИЗИРОВАННЫЙ ПУЧОК БУДКЕРА

В этой главе применяются следующие обозначения: Λ — линейная концентрация, m^{-1} ; $r_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e^2}{m_0} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ — классический радиус электрона; $\nu = \Lambda r_0$ — линейная концентрация электронов на единицу длины, равную r_0 ; $I = \Lambda e \nu c \approx \Lambda e c = \nu e c / r_0$ — электронный ток ($I = 17\,000 \text{ а}$ для $\nu = 1$); n — объемная концентрация частиц, m^{-3} ; n_0 — значение n на оси пучка; r^* — радиус поперечного сечения пучка; R — большой радиус тороидального пучка в магнитном поле; φ — фаза бетатронных колебаний; λ — длина волны бетатронных колебаний; φ — угол отклонения после соударения; k — число соударений; E_z — продольное ускоряющее поле; δ — плотность тока; z — координата в направлении движения электронов.

32.1. Условия равновесия

Введение. Релятивистский стабилизированный пучок состоит примерно из одинакового числа медленных ионов и быстрых электронов. Ионов немного меньше, чем электронов, и поэтому пучок имеет небольшой отрицательный заряд. В таком пучке действуют силы, могущие в принципе обеспечивать его устойчивость. Ионы связаны с пучком силами электростатического взаимодействия. Электроны испытывают незначительное электростатическое расталкивание, но оно компенсируется действием собственного магнитного поля пучка, т. е. магнитным воздействием электронов, находящихся в движении, на самих себя. Электроны и ионы колеблются вокруг общей оси пучка. Эти колебания возникают в результате соударений между ионами и электронами. Существует демпфирование колебаний за счет потери энергии на излучение.

В таком пучке может установиться стационарное равновесие, характерное тем, что толщина пучка очень мала, а магнитное поле внутри пучка и плотность очень велики. На принципиальную возможность существования такого пучка с автостабилизацией указал еще в 1934 г. Беннет, но при этом он не учел излучение. Приводимое здесь описание дано Будкером в 1956 г. Первоначальная идея развивалась затем в ряде теоретических и экспериментальных работ в надежде, что: 1) взаимодействие ионов в пучке большой плотности может привести к термоядерной реакции; 2) внутреннее магнитное поле в пучке, значительно превосходящее по величине внешнее магнитное поле, может служить ведущим полем для других заряженных частиц с энергией, значительно превосходящей ту, что можно достичь на ускорителях в настоящее время.

Однако исследователи встретились с многочисленными теоретическими и экспериментальными трудностями, поэтому за время, прошедшее с 1958 г., по этому вопросу появилось очень немного работ.

Здесь излагается теория пучка Будкера в таком виде, в каком она была представлена в 1958 г., со ссылками на экспериментальную модель «Мегатрон» Финкельштейна [74]. Хотя даваемое ниже изложение этой теории несколько неполно, автору представляется, что оно полезно, так как можно предполагать, что какая-то часть этих идей будет использована в будущих разработках.

Численные примеры, встречающиеся в тексте, относятся к «Мегатрону», который имеет следующие основные параметры: энергия $\gamma = 200 (\approx 100 \text{ Мэв})$; внешнее ведущее поле $B_z = 200\,000 \text{ гс}$; $R = 5 \text{ см}$; $r^* = R/80 = 0,5 \text{ мм}$; $v = 1/20 (\approx 1000 \text{ а})$.

Соотношение концентраций электронов и ионов, при которых возможно состояние равновесия. Рассмотрим в лабораторной системе координат пучок, состоящий из покоящихся ионов и движущихся электронов. Чтобы совокупность зарядов этого пучка действовала на каждый ион силой притяжения, направленной к оси пучка, линейная плотность ионов Λ_+ должна быть меньше линейной плотности электронов Λ_- :

$$\Lambda_- < \Lambda_+. \quad (32.1)$$

В таком пучке на электроны может также действовать сила, направленная к оси пучка, так как электроны находятся в движении и на них в связи с этим действует магнитное поле пучка, образованное движущимися электронами. Эта сила магнитного поля, направленная к центру пучка, может скомпенсировать силы электростатического расталкивания.

Определив собственное магнитное поле пучка, можно найти те пределы справедливости соотношения (32.1), в которых имеется также сила сжатия для электронов.

Решение этой задачи может быть получено и из рассмотрения чисто электростатического поля, если использовать систему координат (*), связанную с движущимися электронами. В этой системе нет никаких сил магнитного сжатия, действующих на электроны. Пусть Λ_-^* и Λ_+^* — электронные и ионные концентрации в этой новой системе координат. Для притяжения электронов к оси нужно, чтобы

$$\Lambda_-^* < \Lambda_+^*. \quad (32.2)$$

Напомним, что расстояние Δz^* в движущейся системе с точки зрения наблюдателя, не принимающего участия в движении, сжимается в направлении вектора скорости в $\sqrt{1 - \beta^2}$ раз, т. е.

$$\Delta z = \Delta z^* \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta z^* / \gamma,$$

где Δz^* — длина, измеренная наблюдателем, связанным с движущейся системой. Для концентрации частиц справедливо, следовательно

но, обратное преобразование: $\Lambda = \gamma \Lambda^*$. Системой, в которой находятся в покое ионы, является лабораторная система. Системой в которой находятся в покое электроны, является система (*). Следовательно, $\Lambda_+^* = \gamma \Lambda_+$ и $\Lambda_-^* = \frac{1}{\gamma} \Lambda_-$ и условие (32.2) принимает вид

$$\frac{\Lambda_-}{\gamma} < \gamma \Lambda_+. \quad (32.2a)$$

Учитывая также условие (32.1), найдем область, в которой существует сила, направленная к оси одновременно и для электронов, и для ионов:

$$1 < \frac{\Lambda_-}{\Lambda_+} < \gamma^2. \quad (32.3)$$

Перепишем предыдущее соотношение в форме

$$1 < \frac{v_-}{v_+} < \gamma^2, \quad (32.3a)$$

введя число частиц

$$v = \Lambda r_0 \quad (32.4)$$

на длине

$$r_0 = \frac{1}{4\pi e_0} \cdot \frac{e^2}{m_0 c^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ м}; \quad (32.5)$$

r_0 — классический радиус электрона. Величина $v = 1$ соответствует линейной концентрации $v/r_0 = 3 \cdot 10^{14}$ электронов на 1 м и току в 17 000 а (при движении электронов со скоростью света c).

Уравнение внутренних траекторий электронов. В этом разделе рассматривается прямой пучок с сечением радиуса r^* , движущийся вдоль оси z , электрически нейтральный, с постоянной величиной плотности ($n_+ = n_- = n$) внутри пучка и равной нулю вне его. Ионы в пучке находятся в состоянии покоя, в то время как электроны имеют скорость, близкую к скорости света c . Рассматривается случай, когда

$$v/\gamma < 1. \quad (32.6)$$

В этом случае движение может быть описано с помощью одной траектории. В противоположном случае $v/\gamma > 1$ движение может рассматриваться лишь статистически [71].

Вначале пренебрежем соударениями электронов и ионов между собой, а также тормозным излучением электронов. Электрическое поле в пучке равно нулю. Магнитное поле имеет только азимутальную составляющую

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_-}{2\pi r^{*2}} r = \frac{2m_0 v c}{e r^{*2}} r; \quad (32.7)$$

$$B_{\text{макс}} = \frac{2m_0 v c}{e r^*}. \quad (32.7a)$$

В «Мегатроне» $B_{\text{макс}} = 4000$ гс. Проекция азимутальной компоненты поля на оси x , y

$$B_x = -B_0 \sin \theta = \frac{2m_0 v c}{e r^{*2}} y;$$

$$B_y = B_0 \cos \theta = \frac{2m_0 v c}{e r^{*2}} x,$$

где $e < 0$ — заряд электрона.

Уравнение движения

$$m_0 \frac{d}{dt} \gamma \mathbf{v} = \gamma m_0 \dot{\mathbf{v}} = e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx e (\mathbf{c} \times \mathbf{B})$$

дает равенства

$$\left. \begin{aligned} \gamma m_0 \ddot{x} &= -e c B_y = -\frac{2v m_0 c^2}{r^{*2}} x; \\ \gamma m_0 \ddot{y} &= e c B_x = -\frac{2v m_0 c^2}{r^{*2}} y. \end{aligned} \right\} \quad (32.8)$$

Интегралы этих уравнений представляют собой гармонические колебания с угловой частотой

$$\omega = \frac{c}{r^*} \sqrt{\frac{2v}{\gamma}}. \quad (32.8a)$$

Если ввести в формулу (32.8) производную по z , $\frac{d^2 x}{dz^2} = x'' = \frac{1}{c^2} \ddot{x}$, то получим уравнения траекторий

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -\frac{2v}{\gamma r^{*2}} x; \\ y'' &= -\frac{2v}{\gamma r^{*2}} y. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Интегралы этих уравнений представляют собой синусоиды с длиной волны «бетатронных» колебаний

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \lambda = r^* \sqrt{\gamma/2v}. \quad (32.9a)$$

Для «Мегатрона» $\lambda \approx 14$ см.

Внутреннее поле пучка является фокусирующим одновременно в двух основных плоскостях xz и yz . Если β_{\perp} — максимальная (относительная) поперечная скорость, то

$$\frac{\beta_{\perp}}{\beta} = \frac{r^*}{\lambda} = \sqrt{\frac{2v}{\gamma}}. \quad (32.10)$$

Сила, x - и y -компоненты которой мы только что написали, на самом деле имеет только одну радиальную составляющую $f_r = e B_0 c$. Такой пучок обладает свойствами потенциальной ямы.

Частица, которая достигает периферии пучка, приобретает потенциальную энергию

$$W = \int_0^{r^*} f_r dr = \int_0^{r^*} \frac{2m_0 v c^2}{r^{*2}} r dr = v m_0 c^2. \quad (32.11)$$

Так, $W \approx 30$ кэв для $v \approx 1/20$ ($I \approx 1000$ а). Средняя энергия поперечного движения соответствует температуре электронов

$$1/2 v m_0 c^2 \approx kT. \quad (32.12)$$

Если имеется избыток электронов, то выражение (32.12) будет того же порядка, что и температура поперечного движения ионов ($kT = 15$ кэв при $v = 1/20$, т. е. $I = 1000$ а для «Мегатрона»).

Радиальное сжатие пучка под действием излучения электронов. Мощность излучения электрона в магнитном поле [см. формулу (20.44)]

$$P_\gamma \approx \frac{2}{3} \frac{r_0 e^2 c \gamma^2}{m_0} B^2. \quad (32.13)$$

Для того чтобы определить среднюю мощность \bar{P}_γ излучения, приходящуюся на один электрон, заменим B^2 выражением $\bar{B}^2 = 1/2 B_{\text{макс}}^2 = 2 \left(\frac{m_0 v c}{e r^*} \right)^2$ [см. формулы (32.7) и (32.7а)]. Таким образом,

$$P_\gamma = \frac{4}{3} \frac{r_0 m_0 c^3 (\gamma v)^2}{r^{*2}}. \quad (32.14)$$

Энергия излучения электрона за время прохождения единицы длины равна $\frac{dW_\gamma}{ds} = \frac{1}{c} \bar{P}_\gamma$. В состоянии равновесия эта энергия должна постоянно поставляться пучку ускоряющим продольным полем $\frac{dW_\gamma}{ds} = eE_z$, или

$$\frac{4}{3} \frac{r_0 m_0 c^3 (\gamma v)^2}{r^{*2}} = eE_z. \quad (32.15)$$

Умножая (32.14) на общее количество электронов $\Lambda 2\pi R$, получим общую мощность излучения кольцевого пучка:

$$\left(\frac{dW_\gamma}{dt} \right)_{\text{общ}} = \frac{8\pi R m_0 c^3 \gamma^2 v^2}{r^{*2}} = eE_z c \Lambda 2\pi R. \quad (32.16)$$

Для упомянутого выше проекта Финкельштейна

$$\left(\frac{dW_\gamma}{dt} \right)_{\text{общ}} = 800 \text{ вт}; \quad E_z = 2,6 \text{ в/м.}$$

В рассматриваемом случае радиус кривизны траектории частиц и потери на излучение в основном определяются ведущим магнитным полем ($B_z = 10^5$ гс), а не внутренним полем пучка ($B = 4000$ гс). Следовательно, мощность излучения будет больше рассчитанной ранее в отношении квадратов этих двух полей и равна примерно 800 квт.

Для того чтобы определить скорость сжатия пучка, необходимо рассмотреть граничную траекторию m . Примем для электрона на этой траектории

$$\left. \begin{aligned} (\overline{B^2})_m &\approx B_{\text{макс}}^2; \\ (\overline{P_\gamma})_m &= \frac{8r_0 m_0 c^3 (\gamma v)^2}{3 r^{*2}}. \end{aligned} \right\} \quad (32.17)$$

Это излучение испускается главным образом в направлении движения в малом угле, равном приблизительно $1/\gamma$. Оно уносит с собой импульс, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} P_\gamma, \quad (32.18)$$

и передает соответствующий импульс отдачи излучающей частице. В результате в уравнении движения появляется дополнительный член, определяющий затухание, и уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + \rho \dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где

$$\rho = \frac{P_\gamma}{\gamma m_0 c^2} \quad (32.19)$$

Коэффициент затухания ρ зависит от x и y посредством B^2 согласно уравнению (32.13) для P_γ . Для линеаризации уравнения (32.19) заменим P_γ его средней величиной (32.17) для граничной траектории. Уравнение движения примет вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_m + \overline{\rho}_m \dot{x}_m + \omega^2 x_m &= 0, \\ \overline{\rho}_m &= \frac{1}{\gamma m_0 c^2} (\overline{P_\gamma})_m = \frac{8r_0 \gamma v^2 c}{3 r^{*2}}. \end{aligned} \right\} \quad (32.20)$$

Известно, что вид решения этого уравнения зависит от знака разности $(4\omega^2 - \overline{\rho}_m^2)$. Можно легко показать, что $4\omega^2 \gg \overline{\rho}_m^2$. При этих условиях интеграл (32.20) запишется следующим образом:

$$x_m = a e^{\frac{-\overline{\rho}_m}{2} t} \cos\left(1/2 \sqrt{4\omega^2 - \overline{\rho}_m^2} t\right) \approx a e^{\frac{-\overline{\rho}_m}{2} t} \cos \omega t. \quad (32.21)$$

Это уравнение слабо затухающих гармонических колебаний. Средний квадрат их амплитуды $\langle \hat{x}_m^2 \rangle = a^2 e^{-\rho_m t}$ убывает со скоростью

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x}_m^2 \rangle = -\langle \hat{x}_m^2 \rangle \rho_m.$$

Такое же уравнение справедливо и для скорости сжатия пучка

$$\frac{d}{dt} r^{*2} = -\rho_m r^{*2} = -\frac{8}{3} r_0 \gamma v^2 c. \quad (32.22)$$

Увеличение толщины пучка, вызванное столкновениями электронов и ионов. Под действием собственного излучения пучок сжимается. С другой стороны, соударения электронов и ионов вызывают расширение пучка. Пучок может находиться в стационарном режиме, когда скорости сжатия и расширения равны.

Определим скорость увеличения радиуса пучка за счет соударений ионов и электронов. Будем рассматривать движение в лабораторной системе координат, в которой ионы находятся в состоянии покоя. Для простоты считаем, что масса ионов бесконечно велика по сравнению с массой электронов. Это предположение справедливо до энергии электронов в несколько сот мегаэлектронвольт.

Рассмотрим изменение направления движения электрона после столкновения. Назовем параметром соударения b расстояние между ионом и продолжением траектории налетающего электрона (рис. 55). Как показал Резерфорд, в кулоновском поле протона траектория электрона изменяет свое направление на угол φ :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m_0 v^2 b} \approx \frac{r_0}{\gamma b}, \quad \text{если } v \approx c. \quad (32.23)$$

Минимальное отклонение $\varphi_{\text{мин}}$ получается при максимальных b . Будкер предположил, что [см. формулу (31.19)]

$$b_{\text{макс}} = r^*. \quad (32.24a)$$

Тогда

$$\varphi_{\text{мин}} = \frac{2r_0}{\gamma r^*}. \quad (32.24b)$$

При центральном ударе

$$\varphi_{\text{макс}} = \pi. \quad (32.25)$$

Из соотношения (32.23) после некоторых преобразований получим эффективное сечение иона $d\sigma(\varphi)$, соответствующее отклонению электрона после столкновения на угол φ :

$$d\sigma(\varphi) = \left(\frac{e^2}{2\gamma m_0 v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\varphi/2)} = \left(\frac{r_0}{2\gamma} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\varphi/2)}. \quad (32.26a)$$

Это формула Резерфорда. Как обычно принято в литературе, мы рассматриваем сечение, приходящееся на единицу телесного угла Ω .

Подставляя $d\Omega = 2\pi \sin \varphi d\varphi$ и $\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2$, получаем

$$d\sigma(\varphi) = 2\pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \frac{d\varphi}{\varphi^3}. \quad (32.26б)$$

Полное эффективное сечение иона при соударении

$$\sigma = \int_{\varphi_{\text{мин}}}^{\varphi_{\text{макс}}} d\sigma = 2\pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \int_{\varphi_{\text{мин}}}^{\varphi_{\text{макс}}} \frac{d\varphi}{\varphi^3} = \pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \left[\frac{1}{\varphi^2} \right]_{\varphi_{\text{мин}}}^{\varphi_{\text{макс}}} = \pi r^{*2}.$$

Если n_+ — плотность ионов, то величина $dk = n_+ \sigma dz$ равна числу столкновений на длине пробега dz . Величина

$$\frac{dk}{dt} = n_+ \sigma c \quad (32.27)$$

есть число столкновений в единицу времени. Каждое столкновение отклоняет электрон на $\delta\varphi$. При очень большом количестве столкно-

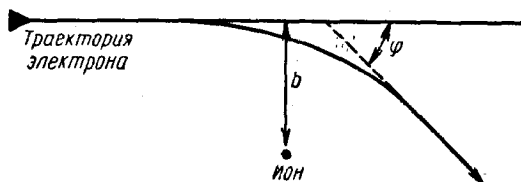


Рис. 55.

вений углы $\delta\varphi$ имеют статистическое распределение. Их средняя величина $\delta\varphi$ равна нулю.

Среднеквадратичная величина углового отклонения (на одно столкновение)

$$\overline{(\delta\varphi)^2} = \int_0^1 dk \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_{\text{мин}}}^{\varphi_{\text{макс}}} \varphi^2 d\sigma \text{ или, учитывая формулу (32.26б),}$$

$$\begin{aligned} \overline{(\delta\varphi)^2} &= 2\pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_{\text{мин}}}^{\varphi_{\text{макс}}} \frac{d\varphi}{\varphi} = 2 \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \ln(\varphi_{\text{макс}}/\varphi_{\text{мин}}) = \\ &= 2\pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\gamma r^*}{r_0} \right), \end{aligned} \quad (32.28)$$

где в аргументе логарифма принято $\pi/2 \approx 1$. Рассмотрим далее влияние столкновения на амплитуду колебаний. Пусть один их электронов (рис. 56) в пучке имеет траекторию вида

$$x(s) = a \sin \frac{s}{\lambda} = a \sin \varphi, \quad (32.29)$$

где φ — фаза колебаний. Предположим, что соударение происходит при фазе φ_1 и вызывает изменение направления траектории на величину $\delta\varphi_1$. Иными словами, толчок возбуждает дополнительное колебание

$$\delta x = \lambda \delta\varphi_1 \sin(\varphi - \varphi_1), \quad (32.30)$$

которое накладывается на первоначальное колебание (32.29). Представим δx в виде

$$\delta x = \lambda \delta\varphi_1 (\cos \varphi_1 \sin \varphi - \sin \varphi_1 \cos \varphi) = (\delta a_\varphi) \sin \varphi + (\delta a_{KB}) \cos \varphi.$$

Таким образом, соударение возбуждает два колебания — одно в фазе с первоначальным, с амплитудой $\delta\varphi_\varphi$, другое в квадратуре

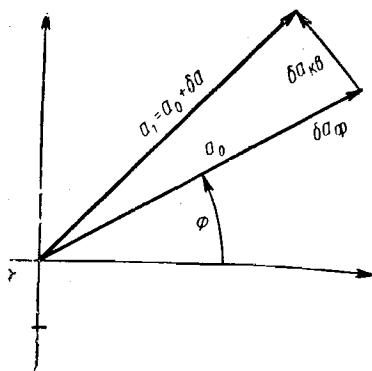


Рис. 56.

с первоначальным, с амплитудой $\delta\varphi_{KB}$. В среднем для большого количества соударений $\overline{\delta a_\varphi} = \overline{\delta a_{KB}} = 0$; $\overline{(\delta a_\varphi)^2} = \overline{(\delta a_{KB})^2} = \frac{1}{2} \lambda^2 \overline{(\delta\varphi)^2}$.

Обозначая амплитуду колебаний до и после удара соответственно a_0 и a_1 , получаем

$$a_1^2 = (a_0 + \delta a_\varphi)^2 + (\delta a_{KB})^2; \quad a_1^2 - a_0^2 = \delta(a^2) = 2a_0 \delta a_\varphi + (\delta a_\varphi)^2 + (\delta a_{KB})^2,$$

а в среднем

$$\overline{\delta(a^2)} = \overline{(\delta a_\varphi)^2} + \overline{(\delta a_{KB})^2} = \lambda^2 \overline{(\delta\varphi)^2}.$$

Скорость изменения квадрата амплитуды

$$\frac{d}{dt} \overline{(a^2)} = \overline{\delta(a^2)} \frac{dk}{dt} = \lambda^2 \overline{(\delta\varphi^2)} \frac{dk}{dt}. \quad (32.31)$$

Подставляя радиус пучка, квадрат которого $r^{*2} = 2\overline{(r^2)} = 4\langle a^2 \rangle$ (a — составляющая r по оси x или y), окончательно получаем для скорости увеличения среднего квадрата радиуса пучка вследствие

столкновений следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} r^{*2} = 4\lambda^2 (\delta\Phi)^2 \frac{dk}{dt} = \quad (32.32a)$$

$$= \frac{16 r_0 c \ln(\gamma r^*/r_0)}{\gamma} . \quad (32.32b)$$

Для удобства читателя приведем еще раз выражения, использованные при переходе от формулы (32.32a) к (32.32b):

$$\lambda^2 = \frac{r^{*2} \gamma}{2v} ;$$

$$\overline{(\delta\Phi)^2} = 2\pi \left(\frac{2r_0}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\gamma r^*}{r_0} \right) ;$$

$$\frac{dk}{dt} = n_+ \sigma c = n\sigma c .$$

Условия равновесия пучка. Пучок в состоянии равновесия должен удовлетворять следующим условиям сохранения импульса и энергии: 1) поперечный импульс, уносимый излучением, должен компенсироваться равным по величине импульсом за счет соударений; 2) энергия, уносимая излучением, должна быть скомпенсирована равной по величине энергией, получаемой от продольного ускоряющего поля E_z .

Первое условие может быть изложено и несколько иначе, а именно: скорость сжатия пучка [см. формулу (32.22)] под действием излучения должна быть равна по абсолютной величине скорости распухания пучка под действием соударений, т. е.

$$\frac{8}{3} r_0 \gamma v^2 c = \frac{8r_0 c}{\gamma} \ln \left(\gamma \frac{r^*}{r_0} \right) .$$

или

$$(\gamma v)^2 = 3 \ln \left(\gamma \frac{r^*}{r_0} \right) . \quad (32.33)$$

Второе условие — компенсация средних потерь энергии на излучение — может быть написано следующим образом [см. формулу (32.15)]:

$$\frac{\overline{dW}}{ds} = \frac{4}{3} \frac{r_0 m_0 c^2 (\gamma v)^2}{r^{*2}} = eE_z ,$$

или

$$r^{*2} = \frac{4}{3} \frac{r_0 m_0 c^2 (\gamma v)^2}{eE_z} = \frac{4r_0 m_0 c^2 \ln \left(\frac{\gamma r^*}{r_0} \right)}{eE_z} . \quad (32.34)$$

Для большого диапазона величин γ (от 10 до 1000) и r^* (от 0,01 до 1 мм) величина $\ln \left(\frac{\gamma r^*}{r_0} \right)$ изменяется от 24 до 34. Принимая

$\ln\left(\frac{\gamma r^*}{r_0}\right) \approx 30$, получаем условия равновесия (32.33) и (32.34) в виде

$$\gamma = \frac{10}{v}; \quad (32.33a)$$

$$r^* = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{E}}, \quad (32.34a)$$

где E — напряженность поля, в/м

Вместо формулы (32.33a) можно записать соответствующее условие для энергии электронов как функции тока

$$W = \frac{8,8 \cdot 10^{10}}{I}, \quad (32.33б)$$

где I — ток, a . Здесь учитывается, что $\gamma m_0 c^2 = W$ и $v \frac{ec}{r_0} = I$.

Условия равновесия (32.33a) и (32.34a) попарно связывают между собой четыре параметра, а именно: 1) выбор v , т. е. тока $I = \frac{ec}{r_0} v$ или числа электронов на длине 1 м $\Lambda = \frac{v}{r_0}$, задает γ и соответственно энергию электронов $W = \gamma m_0 c^2$; 2) выбор ускоряющего поля E_z задает радиус пучка r^* .

Ограничения свободы выбора значений этих параметров задаются условием (32.6).

Эти ограничения сводятся к следующему:

$$\left. \begin{aligned} v &< \sqrt{10} \quad (I < 54\,000 a); \\ \gamma &= \sqrt{10} \quad (W = 1,6 \text{ Мэв}). \end{aligned} \right\} \quad (32.35)$$

Что касается соотношений связи между параметрами, выражаемых формулами (32.33a) и (32.24a), то прежде процитировать самого Будкера [68]:

«На первый взгляд кажется удивительным, что энергия электронов не зависит от ускоряющего поля E_z и что радиус пучка как будто не зависит от числа частиц. На первый взгляд кажется, что чем больше ускоряющее поле, тем выше будет энергия электронов. На самом деле, если мы увеличим электрическое поле, электроны соответственно будут ускоряться. Однако с увеличением их энергии увеличится излучение и пучок сожмется. В пучке с большей плотностью тока сила затухания превысит силу электрического поля и скорость электронов будет уменьшаться до тех пор, пока не примет свое первоначальное равновесное значение. Но при этом радиус пучка станет несколько меньше, чем это следует из формулы (32.34a)».

Аналогично поясняется устойчивость относительно флуктуаций δv или dE .

32.2. Уточнение теории. Устойчивость

Радиальное распределение плотности частиц в самосогласованном внутреннем поле пучка. В предыдущем разделе величина концентрации частиц внутри пучка предполагалась постоянной и одинаковой для положительных и отрицательных зарядов: $n_+(r) = n_-(r) = n$. Принимая во внимание, что разложение в ряд Тейлора реально существующих распределений $n(r)$ четное, предположение, что n постоянно, в первом приближении достаточно для предварительного расчета траекторий частиц.

На самом деле концентрация частиц является функцией радиальной координаты, которую можно определить, решая следующую самосогласованную задачу: найти пространственное распределение заряженных частиц в потенциальной яме, форма которой в свою очередь является следствием этого распределения. Ниже будут получены дифференциальные уравнения для этого распределения в предположении, что функции распределения для ионов и электронов имеют различный вид: $n_+(r) \neq n_-(r)$. Расчеты делаются в предположении, что пространственное распределение ионов и электронов будет таким же, как если бы частицы находились в состоянии термодинамического равновесия. Следует отметить, что приводимые ниже расчеты дают только иллюстрацию характера распределения частиц в их собственном поле, а получаемое распределение является грубым приближением к реально существующему.

Используя формулу Больцмана пространственного распределения $n(x, y, z)$ частиц газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия при температуре T в поле силы $f = -e \text{ grad}V(x, y)$, получим

$$n(x, y) = n(0, 0) e^{\frac{-e[V(x, y) - V(0, 0)]}{kT}} = n_0 e^{\frac{-eV}{kT}}, \quad (32.36)$$

считая, что $V_0 = 0$. В рассматриваемом случае в силу симметрии пучка функция V имеет вид $V = V(r)$. Беря логарифмическую производную от выражения (32.36), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dr} &= -\frac{e}{kT} \cdot \frac{dV}{dr}; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r dn}{n dr} \right) &= -\frac{e}{kT} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (32.37)$$

В этом последнем уравнении вид потенциала V в правой части в свою очередь определяется искомым распределением $n(r)$. $V(r)$ зависит не только от электростатического потенциала, но и от полной силы, действующей на частицу: $-eV(r) = \int_0^r (f, dr)$. Следовательно, но, для протонов

$$-e \frac{dV_+}{dr} = f_+ = eE_r,$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_+}{dr} \right) &= +\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (rE_r) = \\
 &= \operatorname{div}_r \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{|e|}{\varepsilon_0} (n_+ - n_-), \quad (32.38a)
 \end{aligned}$$

а для электронов

$$\begin{aligned}
 -\frac{e dV_-}{dr} &= j_- = e [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_r = e (E_r - cB_\theta); \\
 -\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_-}{dr} \right) &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (rE_r - rcB_\theta) = \operatorname{div} \mathbf{E} - c \operatorname{rot}_z \mathbf{B}. \quad (32.38б)
 \end{aligned}$$

E_r и B_θ определяются через распределение плотностей:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{|e|}{\varepsilon_0} (n_+ - n_-); \\
 \operatorname{rot}_z \mathbf{B} &= \mu_0 \delta = -|e| \mu_0 c n_- = -\frac{|e|}{\varepsilon_0 c} n_-.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для электронов

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_-}{dr} \right) = \frac{|e|}{\varepsilon_0} n_-. \quad (32.38в)$$

Этот результат введем в формулу (32.37) и получим дифференциальные уравнения задачи «самостабилизации» для ионов:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn_+}{dr} \right) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 kT_+} (n_+ - n_-); \quad (32.39a)$$

для электронов

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn_-}{dr} \right) = \frac{-e^2}{\varepsilon_0 kT_-} n_-. \quad (32.39б)$$

Возможным решением уравнений (32.39) является

$$n_+(r) = \frac{n_+(0)}{\left[1 + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \right]^2}; \quad n_-(r) = \frac{n_-(0)}{\left[1 + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \right]^2}, \quad (32.40)$$

где

$$r^* = \frac{8\varepsilon_0 kT}{e^2 n_+(0)} = \frac{8\varepsilon_0 kT_+}{e^2 [n_-(0) - n_+(0)]}. \quad (32.41)$$

Для $n_\pm(0)$ можно подставить значения

$$\frac{n_\pm}{r_0} = \Lambda_\pm \int_0^\infty n_\pm(r) 2\pi r dr = n_\pm(0) \pi r^{*2}.$$

Тогда вместо выражения (32.41) получим

$$1 = \frac{2kT_-}{v_+ m_0 c^2} = \frac{2}{(v_- - v_+)} \cdot \frac{kT_+}{m_0 c^2},$$

где

$$\left. \begin{aligned} kT_- &= 1/2 v_+ m_0 c^2; \\ kT_+ &= 1/2 (v_- - v_+) m_0 c^2, \end{aligned} \right\} \quad (32.42)$$

что соответствует по порядку величины прежнему результату (32.42).

Фактически мы имеем обратную задачу, так как температура определяется механизмом столкновения частиц. Подставляя затем эту температуру в уравнения (32.39), получаем систему, полностью определяющую единственное решение.

Радиус кривизны и коллективная масса интенсивного пучка. Пучок с местным изгибом (рис. 57) испытывает действие силы, являющейся результатом этого изгиба. Эта сила направлена в сторону

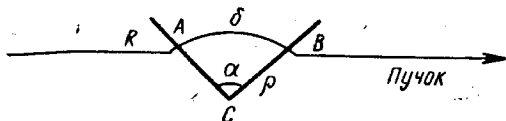


Рис. 57.

выпуклости. Она появляется вследствие воздействия собственного магнитного поля изогнутого элемента пучка.

Пусть изгиб характеризуется длиной дуги s , радиусом кривизны ρ и углом $\alpha = s/\rho$. Для того чтобы получить выражение силы, проинтегрируем магнитное давление f по поверхности S , которая опирается на контур s

$$df = \mu_0 [(\mathbf{H}, d\mathbf{S}) \mathbf{H} - 1/2 H^2 dS]. \quad (32.43)$$

Замкнутая поверхность интегрирования S имеет две поверхности AC и BC , которые перпендикулярны к пучку. Другие части поверхности S находятся в бесконечности.

Прямолинейная часть пучка окружена концентрическими силовыми линиями. Каждая силовая линия располагается в плоскости, перпендикулярной к пучку. Вблизи пучка, т. е. для $r \lesssim s$, эта конфигурация повторяет форму изгиба. Таким образом, на поверхностях AC и BC и на цилиндре вокруг пучка, т. е. для $r \approx s$, магнитное давление перпендикулярно к этим поверхностям и равно

$df = \frac{\mu_0}{2} H^2 dS$, а его радиальная составляющая

$$(df)_r = \frac{\alpha \mu_0}{4} H^2 dS. \quad (32.44)$$

Для $r > s$ конфигурация поля такая же, как и при отсутствии изгиба.

Ввиду симметрии эта очень обширная область не создает дополнительной радиальной составляющей.

Полная радиальная сила, действующая на поверхность S , может быть получена интегрированием:

$$f_r = \alpha \frac{\mu_0}{2} \int_0^{r=s} H^2 dS = \frac{s\mu_0}{2\rho} \int_0^s H^2 2\pi r dr,$$

где

$$H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r}{r^{*2}} & \text{для } 0 < r < r^*; \\ \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} & \text{для } r > r^*. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{\mu_0 I^2 s}{4\pi\rho} \left(\int_0^{r^*} \frac{r^3 dr}{r^{*4}} + \int_{r^*}^s \frac{dr}{r} \right) = \\ &= \frac{\pi_0 I^2 s}{4\pi\rho} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{s}{r^*} \right) \approx \frac{\mu_0 I^2 s}{4\pi\rho} \ln \frac{s}{r^*}. \end{aligned} \quad (32.45)$$

Радиальная сила, с которой магнитное поле пучка в виде замкнутого тока радиусом R действует на элемент ds того же пучка, также может быть определена выражением вида (32.45), в котором s/ρ заменяется ds/R . В этом случае верхний предел интегрирования s , который фигурирует в числителе под знаком логарифма, соответствует границе поля. Значение этого предела имеет порядок величины радиуса R тора. Его минимальное значение соответствует стенкам вакуумной камеры. Ввиду очень слабого влияния, оказываемого этим пределом на значение логарифма, можно без большой ошибки заменить во всех случаях s на R .

Направленная наружу от оси радиальная сила, с которой собственное магнитное поле пучка в форме тора радиусом R действует на каждый из элементов дуги s , имеет, следовательно, порядок величины

$$df_s = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \cdot \frac{ds}{R} \ln \frac{R}{r^*} = v\Lambda_- m_0 c^2 \frac{ds}{R} \cdot \ln \frac{R}{r^*}. \quad (32.46)$$

Обычная центробежная сила, действующая на массу этого же элемента ds , равна

$$df_c = m_0 \Lambda_- ds \frac{c^2}{R} \quad (32.47)$$

(вкладом ионов можно пренебречь). Таким образом, полная радиальная сила

$$dF = df_s + df_c = m_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \right) \frac{c^2}{R} \Lambda_-, \quad (32.48)$$

или в расчете на один электрон $F_e = m_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \right) \frac{c^2}{R}$.

Для того чтобы тороидальный пучок радиусом R был устойчив, необходимо, чтобы полная радиальная центробежная сила была равна центростремительной силе, вызываемой ведущим магнитным полем с индукцией B :

$$m_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \right) \frac{c^2}{R} = eBc,$$

или

$$BR = \frac{m_0 \gamma c}{e} \left(1 + \frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \right);$$

последнее соотношение может быть приведено к классическому виду:

$$BR = \frac{m_0 \gamma c}{e} = \frac{p}{e}, \quad \text{если} \quad \frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \ll 1.$$

С другой стороны, сила df_s [формула (32.46)], с которой поле тороида действует на его элемент,

$$df_s = \frac{ds}{R} \int_0^R \frac{HB}{2} 2\pi r dr = \frac{dW}{R},$$

где dW — магнитная энергия, создаваемая элементом пучка длиной дуги ds .

Полная центробежная сила, действующая на элемент дуги [формула (32.48)], может быть записана как

$$dF = df_c + df_s = \left(m_0 \gamma \Lambda - ds + \frac{dW}{c^2} \right) \frac{c^2}{R}. \quad (32.49)$$

Масса покоя, таким образом, увеличена на величину массы, соответствующей энергии поля. Действие энергии поля может быть также истолковано как действие электромагнитной индукции.

Известно, что инерция электрона может быть представлена как проявление собственной энергии его поля, которая возрастает как B^2 . Полное поле пучка электронов может быть разложено в пространстве на сумму сильного собственного локального поля около каждого электрона и коллективного макрополя. Энергия первой составляющей при увеличении числа электронов возрастает линейно, в то время как энергия второй составляющей зависит от квадрата числа электронов и может стать преобладающей для интенсивного пучка при $\frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} \gg 1$. Однако в проекте Финкельштейна эта величина составляет лишь $\frac{v}{\gamma} \ln \frac{R}{r^*} = 1,3 \cdot 10^{-3}$.

Неустойчивость изгибов. Из многих степеней свободы, присущих пучку, рассмотрим здесь изгибы пучка и покажем, что они могут привести к неустойчивости. Будем рассматривать пучок в пространст-

ве, где нет поля, и считать, что поперечное сечение пучка устойчиво. Введем декартовы координаты x, y, z , где z — направление распространения пучка со скоростью, предполагаемой постоянной, но различной для протонов и электронов:

$$v_+ = \left(\frac{dz}{dt} \right)_+ = \text{const} < 0, \quad v_- = \left(\frac{dz}{dt} \right)_- = c.$$

Рассмотрим пучок, имеющий малые отклонения $x(z, t)$ и $y(z, t)$ относительно прямой $x = y = 0$.

Далее будем рассматривать уравнения только для составляющей по оси x . Кроме того, будем рассматривать отдельно электроны и отдельно ионы.

Короткий отрезок пучка Δz обладает поперечной скоростью

$$\frac{d}{dt} x(z, t) = \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) x.$$

Его ускорение в поперечном направлении

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 x,$$

т. е.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_+ \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 x_+ & \text{для ионов;} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 x_- & \text{для электронов.} \end{cases}$$

Уравнения движения отрезка пучка имеют вид

$$\Lambda_+ dz M \frac{d^2 x_+}{dt^2} = F_+ + f_{+-} \quad \text{для ионов;}$$

$$\Lambda_- dz m_0 \gamma \frac{d^2 x_-}{dt^2} = F_- + f_{-+} \quad \text{для электронов,}$$

где F — внешняя сила; f — сила взаимодействия между ионами и электронами; причем $f_{+-} = -f_{-+}$.

Как уже было сказано, мы считаем, что поперечное сечение пучка постоянно, т. е. возможность разделения ионов и электронов в боковом направлении исключена. Примем, таким образом, $x_+ = x_- = x$. Линейные плотности электронов и ионов считаем одинаковыми $\Lambda_- = \Lambda_+ = \Lambda$. Тогда в дополнение к двум предыдущим уравнениям можно записать уравнение движения нейтрального отрезка пучка длины dz в виде

$$\Lambda dz \left[M \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_+ \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + m_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] x = F_+ + F_- = F(x, t), \quad (32.50)$$

где F — внешняя сила, действующая на весь отрезок пучка dz .

В отсутствие всех внешних сил пучок движется по прямой линии, являющейся решением уравнения (32.50); $x = 0$; $\dot{x} = 0$.

Проблема устойчивости может быть поставлена следующим образом: если малые возмущения (паразитные магнитные поля) вызовут в какой-то момент времени t_0 отклонение траектории от прямой линии, то как изменится пучок после момента t_0 , если считать, что $F = 0$?

Уравнение движения после момента t_0 будет иметь вид

$$\left[M \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_+ \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + m_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] x = 0. \quad (32.51)$$

Разложим функцию x в ряд Фурье:

$$x(z, t) = \sum a_k e^{i(\omega_k t + kz)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (32.52)$$

Этот ряд можно использовать при любых начальных условиях $x(z, t_0)$. Здесь a_k — амплитуда синусоидального возмущения пучка с длиной волны $\lambda_k = 1/k$; каждый член ряда (32.52) удовлетворяет дифференциальному уравнению (32.51).

Подставляя в уравнение (32.51) каждый член ряда, получим уравнение для ω_k , из которого можно найти условие устойчивости для возмущения k -го порядка:

$$M(\omega_k + v_+ k)^2 + m_0 \gamma (\omega_k + ck)^2 = 0. \quad (32.53)$$

Левая часть этого уравнения всегда положительна. Каждому действительному значению k соответствуют две комплексно сопряженные величины ω_k . Одна из них определяет уравнение с экспоненциально возрастающей амплитудой. Таким образом, если k — действительно, то пучок неустойчив.

Можно получить приближенное уравнение движения, более простое, чем уравнение (32.51), предполагая, что суммарный импульс пучка равен нулю:

$$m_0 \gamma c + Mv_+ = p_+ + p_- = 0. \quad (32.54)$$

Это предположение справедливо для бетатрона, в котором ускоряются одновременно заряженные частицы обеих полярностей, импульсы которых равны между собой и соответствуют напряженности поля. В этом случае имеем $m_0 \gamma c^2 \gg Mv_+^2$ и $m_0 \gamma \ll M$, что позволяет пренебречь двумя членами в уравнении (32.51).

С учетом равенства (32.54) уравнение движения запишется следующим образом:

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + m_0 \gamma c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = F_x = 0. \quad (32.55)$$

Для ω_k получаем следующее условие:

$$\omega_k^2 M + m_0 \gamma c^2 k^2 = 0, \quad (32.56)$$

откуда, если предположить, что $\sqrt{\frac{m_0 \gamma}{M}} \approx 1$,

$$\omega_k = \pm ick \sqrt{\frac{m_0 \gamma}{M}} \approx \pm i \frac{c}{\lambda_k}. \quad (32.57)$$

Уравнение (32.57) показывает, что постоянная времени нарастания амплитуды равна по порядку величины времени, за которое электрон перемещается на длину волны возмущения.

Неустойчивость изгибов с учетом сил притяжения между положительными и отрицательными зарядами. Использованное в предыдущем разделе предположение о том, что расположение ионов и электронов в поперечном сечении пучка неизменно, не является достаточно строгим. В этом разделе предполагается, что электроны и ионы могут смещаться друг относительно друга. Их смещение вызывает внутренние силы электростатического притяжения, которые определяют силу, приходящуюся на единицу длины пучка (рис. 58). Очень малое взаимное смещение зарядов δx , предполагаемых равными и однородными по длине пучка с плотностью $\rho = en$, вызывает появление на периферии пучка единичной высоты $\Delta y = 1$ поверхностного заряда $\sigma = ne \delta x$, не зависящего от y . Эти поверхностные заряды создают внутри пучка электрическое поле с составляющими $E_y = E_z = 0$:

$$E_x = \frac{D_x}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} ne \delta x.$$

Электростатическая энергия этого поля

$$W = 1/2 D_x E_x \pi r^{*2} = \frac{\pi r^{*2}}{2\epsilon_0} (ne \delta x)^2 = 1/2 \frac{(\Lambda e)^2}{\epsilon_0 \pi r^{*2}} (\delta x)^2.$$

Сила притяжения между зарядами

$$f = \frac{dW}{dx} = K \delta x, \quad (32.58)$$

где $K = \frac{(\Lambda e)^2}{\epsilon_0 \pi r^{*2}}$.

Эта сила действует на положительную и отрицательную части пучка в противоположных направлениях. Пусть координаты центров тяжести положительной и отрицательной части пучка соответственно равны x_+ и x_- . Уравнения движения запишутся отдельно для каждой из этих частей пучка в отсутствие внешних сил следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda M \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_+ \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 x_+ &= K (x_- - x_+); \\ \Lambda m_0 \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 x_- &= K (x_+ - x_-). \end{aligned} \right\} \quad (32.59)$$

Интегралы этих двух уравнений могут быть представлены в виде ряда Фурье с составляющими, пропорциональными

$$e^{-(i\omega_k + kz)}. \quad (32.60)$$

Подставляя какой-либо член вида (32.60) в дифференциальные уравнения (32.59), получим

$$\begin{aligned} -M(\omega_k + v_+ k)^2 x_+ &= \frac{K}{\Lambda} (x_- - x_+); \\ -m_0 \gamma (\omega_k + ck)^2 x_- &= \frac{K}{\Lambda} (x_+ - x_-); \\ \frac{\Lambda}{K} \cdot \frac{x_+}{x_+ - x_-} &= \frac{1}{M(\omega_k + v_+ k)^2}; \\ \frac{\Lambda}{K} \cdot \frac{x_+}{x_+ - x_-} &= \frac{-1}{m_0 \gamma (\omega_k + ck)^2}; \\ \frac{1}{M(\omega_k + v_+ k)^2} + \frac{1}{m_0 \gamma (\omega_k + ck)^2} &= \frac{\Lambda}{K}. \end{aligned} \quad (32.61)$$

Положим, что $Mv_+ + m_0 \gamma c = 0$, и пренебрежем малыми величинами $Mv^2 \ll m_0 \gamma c^2$, $m_0 \gamma \ll M$. Далее подставим $\frac{\Lambda}{K} = \frac{r^*}{4vm_0 c^2}$. Диспер-

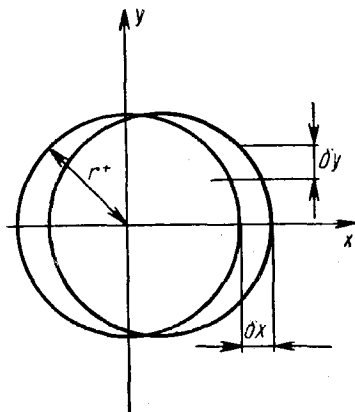


Рис. 58.

сионное соотношение (32.61) примет тогда вид

$$\frac{m_0 \gamma}{M\omega_k^2} + \frac{1}{c^2 k^2} = \frac{r^{*2} \gamma}{4vc^2}. \quad (32.62)$$

Это соотношение показывает, что движение будет устойчиво, если ω действительно, или

$$k^2 \geq \frac{4v}{\gamma r^{*2}}. \quad (32.63)$$

Если считать, что переменная z имеет размерность длины, то k имеет обратную размерность, причем $k = \lambda^{-1}$, где λ — длина волны (деленная на 2π) возмущения k -го порядка. Условие устойчивости (32.63) может быть тогда написано следующим образом:

$$\lambda \leq \pi r^* \sqrt{\gamma/v}. \quad (32.64)$$

Для «Мегатрона» $\gamma = 200$, $v = 1/20$, $r^* = 0,5$ мм. Следовательно, устойчивость должна существовать для возмущений с длиной волны $\lambda \leq 10$ см.

В других условиях (меньшая плотность ионов, неоднородное пространственное распределение) предельная длина волны будет еще больше.

Стабилизация внешним фокусирующим магнитным полем. Ограничимся здесь очень грубой оценкой, дающей лишь правильный порядок величины.

Введем следующие упрощения:

1. Пренебрежем большим радиусом кривизны круговой траектории, т. е. будем рассматривать прямолинейный пучок.

2. В случае фокусировки знакопеременным градиентом заменим внешнюю переменную силу F средней центральной силой \bar{F} (см. гл. 9). Эта средняя сила может быть охарактеризована бетатронной длиной волны, которую имел бы свободный электрон в данном фокусирующем поле. Если электрон имеет траекторию $x = \sin \lambda_0^{-1} z$, то (средняя) упругая сила, действующая на него,

$$\bar{F} = m_0 \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = m_0 \gamma c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -m_0 \gamma \left(\frac{c}{\lambda_0} \right)^2 x. \quad (32.65)$$

3. Для интенсивного пучка используем приближенное уравнение движения (32.55). Вводя внешнюю силу (32.65), имеем

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + m_0 \gamma c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + m_0 \gamma \left(\frac{c}{\lambda_0} \right)^2 x = 0. \quad (32.66)$$

Подставив в это уравнение решение

$$x = e^{-i(\omega t + kz)} = e^{-i\left(\omega t + \frac{z}{\lambda}\right)},$$

получим для ω уравнение

$$\omega^2 = \frac{m_0 \gamma c^2}{M} (\lambda_0^{-2} - \lambda^{-2}). \quad (32.67)$$

Следовательно, движение устойчиво для $\lambda > \lambda_0$.

С другой стороны, рассмотренное выше разделение зарядов не нарушает устойчивость, если $\lambda < \pi r^* \sqrt{\gamma/v}$. Фокусирующее поле, в котором свободный электрон имеет длину волны бетатронного колебания,

$$\lambda_0 < \pi r^* \sqrt{\gamma/v}.$$

обеспечивает устойчивость при изгибах пучка независимо от присущей ему длины волны.

Как мы уже подчеркивали в начале главы, эта относительно новая теория имеет пробелы. В частности, она не учитывает неустойчивости, открытые совсем недавно.

Однако общая постановка задачи и значительная часть выводов остаются актуальными и ценными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Масса, скорость, импульс и «магнитная жесткость»
протона и электрона

$E - E_0, \text{кэВ}$	γ	β	$ср, \text{кэВ}$	$B\rho, \text{Т} \cdot \text{ж}$
Протон				
10	1,000	$4,62 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^3$	$1,44 \cdot 10^{-2}$
20	1	6,53	6,12	2,04
30	1	8,00	7,50	2,50
40	1	9,23	8,66	2,89
50	1	$1,03 \cdot 10^{-2}$	9,68	3,23
60	1	1,13	$1,06 \cdot 10^4$	3,54
70	1	1,22	1,14	3,82
80	1	1,31	1,23	4,09
90	1	1,38	1,30	4,33
100	1	1,46	1,37	4,57
110	1	1,53	1,44	4,79
120	1	1,60	1,50	5,01
130	1	1,66	1,56	5,21
140	1	5,73	1,62	5,41
150	1	1,79	1,68	5,60
160	1	1,85	1,73	5,78
170	1	1,90	1,79	5,96
180	1	1,96	1,84	6,13
190	1	2,01	1,89	6,30
200	1	2,06	1,94	6,46
210	1	2,12	1,99	6,62
220	1	2,17	2,03	6,78
230	1	2,21	2,08	6,93
240	1	2,26	2,12	7,08
250	1	2,31	2,17	7,23
260	1	2,35	2,21	7,37
270	1	2,40	2,25	7,51
280	1	2,45	2,30	7,66
290	1	2,49	2,33	7,78
300	1	2,53	2,37	7,91
310	1	2,57	2,41	8,05
320	1	2,61	2,45	8,17
330	1	2,65	2,49	8,30
340	1	2,69	2,53	8,43

$E-E_0$, кэв	γ	β	ср. кэв	Вр, Г·м
350	1,000	$2,73 \cdot 10^{-2}$	$2,56 \cdot 10^4$	$8,55 \cdot 10^{-2}$
360	1	2,77	2,60	8,67
370	1	2,81	2,64	8,79
380	1	2,85	2,67	8,91
390	1	2,88	2,71	9,02
400	1	2,92	2,74	9,14
410	1	2,96	2,77	9,25
420	1	2,99	2,81	9,37
430	1	3,03	2,84	9,48
440	1	3,06	2,87	9,59
450	1	3,10	2,91	9,69
460	1	3,13	2,94	9,80
470	1	3,16	2,97	9,91
480	1	3,20	3,00	$1,00 \cdot 10^{-1}$
490	1	3,23	3,03	1,01
500	1,001	3,26	3,06	1,02
550	1,001	3,42	3,21	1,07
600	1,001	3,57	3,36	1,12
650	1,001	3,72	3,49	1,17
700	1,001	3,86	3,62	1,21
750	1,001	4,00	3,75	1,25
800	1,001	4,13	3,88	1,29
850	1,001	4,25	3,99	1,33
900	1,001	4,38	4,11	1,38
950	1,001	4,50	4,22	1,41
1000	1,001	4,61	4,33	1,45
$E-E_0$, Мэв			ср. Мэв	
1	1,001	$4,61 \cdot 10^{-2}$	$4,33 \cdot 10^4$	$1,45 \cdot 10^{-1}$
1,1	1,001	4,84	4,54	1,52
1,2	1,001	5,05	4,75	1,58
1,3	1,001	5,26	4,94	1,65
1,4	1,001	5,46	5,13	1,71
1,5	1,002	5,65	5,31	1,77
1,6	1,002	5,83	5,48	1,83
1,7	1,002	6,01	5,65	1,88
1,8	1,002	6,19	5,81	1,94
1,9	1,002	6,35	5,97	1,99
2	1,002	6,52	6,13	2,04
2,1	1,002	6,68	6,28	2,10
2,2	1,002	6,84	6,43	2,14
2,3	1,002	6,99	6,57	2,19
2,4	1,003	7,14	6,72	2,24
2,5	1,003	7,29	6,85	2,29
2,6	1,003	7,43	6,99	2,33
2,7	1,003	7,57	7,12	2,38
2,8	1,003	7,71	7,25	2,42
2,9	1,003	7,84	7,38	2,46
3	1,003	7,98	7,51	2,50
3,1	1,003	8,11	7,63	2,55
3,2	1,003	8,24	7,76	2,59

Продолжение

$E-E_0$, Мэв	γ	β	ср. Мэв	V_r , Г·м
3,3	1,004	$8,37 \cdot 10^{-2}$	$7,88 \cdot 10^1$	$2,63 \cdot 10^{-1}$
3,4	1,004	8,49	7,99	2,67
3,5	1,004	8,61	8,11	2,71
3,6	1,004	8,74	8,23	2,74
3,7	1,004	8,85	8,34	2,78
3,8	1,004	8,97	8,45	2,82
3,9	1,004	9,09	8,56	2,86
4	1,004	9,20	8,67	2,89
4,1	1,004	9,32	8,78	2,93
4,2	1,004	9,43	8,89	2,96
4,3	1,005	9,54	8,99	3,00
4,4	1,005	9,65	9,10	3,03
4,5	1,005	9,76	9,20	3,07
4,6	1,005	9,87	9,30	3,10
4,7	1,005	9,97	9,40	3,14
4,8	1,005	$1,01 \cdot 10^{-1}$	9,50	3,17
4,9	1,005	1,02	9,60	3,20
5	1,005	1,03	9,70	3,24
5,5	1,006	1,08	$1,02 \cdot 10^2$	3,39
6	1,006	1,13	1,06	3,54
6,5	1,007	1,17	1,11	3,69
7	1,007	1,21	1,15	3,83
7,5	1,008	1,26	1,19	3,97
8	1,009	1,30	1,23	4,10
8,5	1,009	1,34	1,27	4,22
9	1,01	1,38	1,30	4,35
9,5	1,01	1,41	1,34	4,46
10	1,01	1,45	1,37	4,58
11	1,01	1,52	1,44	4,81
12	1,01	1,58	1,51	5,02
13	1,01	1,65	1,57	5,23
14	1,01	1,71	1,63	5,43
15	1,02	1,77	1,68	5,62
16	1,02	1,82	1,74	5,80
17	1,02	1,88	1,79	5,98
18	1,02	1,93	1,85	6,16
19	1,02	1,98	1,90	6,33
20	1,02	2,03	1,95	6,50
21	1,02	2,08	2,00	6,66
22	1,02	2,13	2,04	6,82
23	1,02	2,17	2,09	6,97
24	1,03	2,22	2,14	7,12
25	1,03	2,26	2,18	7,27
26	1,03	2,31	2,22	7,42
27	1,03	2,35	2,27	7,56
28	1,03	2,39	2,31	7,70
29	1,03	2,43	2,35	7,84
30	1,03	2,47	2,39	7,98
31	1,03	2,51	2,43	8,11
32	1,03	2,55	2,47	8,24
33	1,04	2,58	2,51	8,37
34	1,04	2,62	2,55	8,50

$E - E_0, \text{ Мэв}$	γ	β	ср. Мэв	Вр. Т.м
35	1,04	$2,66 \cdot 10^{-1}$	$2,59 \cdot 10^2$	$8,63 \cdot 10^{-1}$
36	1,04	2,69	2,62	8,75
37	1,04	2,73	2,66	8,87
38	1,04	2,76	2,70	9,00
39	1,04	2,80	2,73	9,12
40	1,04	2,83	2,77	9,24
41	1,04	2,86	2,80	9,35
42	1,04	2,90	2,84	9,47
43	1,05	2,93	2,87	9,58
44	1,05	2,96	2,91	9,70
45	1,05	2,99	2,94	9,81
46	1,05	3,02	2,97	9,92
47	1,05	3,05	3,01	$1,00 \cdot 10^0$
48	1,05	3,08	3,04	1,01
49	1,05	3,11	3,07	1,02
50	1,05	3,14	3,10	1,03
55	1,06	3,28	3,26	1,09
60	1,06	3,41	3,41	1,14
65	1,07	3,54	3,55	1,18
70	1,07	3,66	3,69	1,23
75	1,08	3,78	3,83	1,28
80	1,09	3,89	3,96	1,32
85	1,09	3,99	4,08	1,36
90	1,10	4,09	4,21	1,40
95	1,10	4,19	4,33	1,44
100	1,11	4,28	4,45	1,48
110	1,12	4,46	4,67	1,56
120	1,13	4,63	4,89	1,63
130	1,14	4,78	5,11	1,70
140	1,15	4,93	5,31	1,77
150	1,16	5,07	5,51	1,84
160	1,17	5,20	5,71	1,90
170	1,18	5,32	5,90	1,97
180	1,19	5,44	6,08	2,03
190	1,20	5,55	6,27	2,09
200	1,21	5,66	6,44	2,15
210	1,22	5,76	6,62	2,21
220	1,23	5,86	6,79	2,27
230	1,25	5,96	6,96	2,32
240	1,26	6,05	7,13	2,38
250	1,27	6,14	7,29	2,43
260	1,28	6,22	7,45	2,49
270	1,29	6,30	7,61	2,54
280	1,30	6,38	7,77	2,59
290	1,31	6,45	7,93	2,64
300	1,32	6,53	8,08	2,70
310	1,33	6,60	8,23	2,75
320	1,34	6,66	8,38	2,80
330	1,35	6,73	8,53	2,85
340	1,36	6,79	8,68	2,90
350	1,37	6,85	8,83	2,94
360	1,38	6,91	8,87	2,99

$E-E_0, \text{ Мэв}$	γ	β	ср, Мэв	$V_p, \text{ Г.ж}$
370	1,39	$6,97 \cdot 10^{-1}$	$9,12 \cdot 10^a$	$3,04 \cdot 10^0$
380	1,41	7,02	9,26	3,09
390	1,42	7,08	9,40	3,13
400	1,43	7,13	9,54	3,18
410	1,44	7,18	9,68	3,23
420	1,45	7,23	9,82	3,28
430	1,46	7,28	9,96	3,32
440	1,47	7,32	$1,01 \cdot 10^b$	3,37
450	1,48	7,37	1,02	3,41
460	1,49	7,41	1,04	3,46
470	1,50	7,46	1,05	3,50
480	1,51	7,50	1,06	3,55
490	1,52	7,54	1,08	3,59
500	1,53	7,58	1,09	3,64
550	1,59	7,76	1,15	3,85
600	1,64	7,92	1,22	4,07
650	1,69	8,07	1,28	4,27
700	1,75	8,20	1,34	4,48
750	1,80	8,31	1,40	4,68
800	1,85	8,42	1,46	4,88
850	1,91	8,51	1,52	5,08
900	1,96	8,60	1,58	5,27
950	2,01	8,68	1,64	5,47
1000	2,07	8,75	1,70	5,66
$E-E_0, \text{ Гэв}$			ср, Гэв	
1	2,07	$8,75 \cdot 10^{-1}$	$1,70 \cdot 10^0$	$5,66 \cdot 10^0$
1,1	2,17	8,88	1,81	6,04
1,2	2,28	8,99	1,92	6,41
1,3	2,39	9,08	2,03	6,78
1,4	2,49	9,16	2,14	7,14
1,5	2,60	9,23	2,25	7,51
1,6	2,71	9,29	2,36	7,87
1,7	2,81	9,35	2,47	8,22
1,8	2,92	9,39	2,57	8,58
1,9	3,03	9,44	2,68	8,94
2	3,13	9,48	2,78	9,29
2,1	3,24	9,51	2,89	9,64
2,2	3,34	9,54	2,99	9,99
2,3	3,45	9,57	3,10	$1,03 \cdot 10^{+1}$
2,4	3,56	9,60	3,20	1,07
2,5	3,66	9,62	3,31	1,10
2,6	3,77	9,64	3,41	1,14
2,7	3,88	9,66	3,52	1,17
2,8	3,98	9,68	3,62	1,21
2,9	4,09	9,70	3,72	1,24
3	4,20	9,71	3,82	1,28
3,1	4,30	9,73	3,93	1,31
3,2	4,41	9,74	4,03	1,34
3,3	4,52	9,75	4,13	1,38
3,4	4,62	9,76	4,24	1,41

$E-E_0, \text{Гэв}$	γ	β	ср. Гэв	Вр. Т.ж
3,5	4,73	$9,77 \cdot 10^{-1}$	$4,34 \cdot 10^0$	$1,45 \cdot 10^1$
3,6	4,84	9,78	4,44	1,48
3,7	4,94	9,79	4,54	1,52
3,8	5,05	9,80	4,64	1,55
3,9	5,16	9,81	4,75	1,58
4	5,26	9,82	4,85	1,62
4,1	5,37	9,83	4,95	1,65
4,2	5,48	9,83	5,05	1,69
4,3	5,58	9,84	5,15	1,72
4,4	5,69	9,84	5,26	1,75
4,5	5,80	9,85	5,36	1,79
4,6	5,90	9,86	5,46	1,82
4,7	6,01	9,86	5,56	1,85
4,8	6,12	9,87	5,66	1,89
4,9	6,22	9,87	5,76	1,92
5	6,33	9,87	5,86	1,96
5,5	6,86	9,89	6,37	2,12
6	7,40	9,91	6,87	2,29
6,5	7,93	9,92	7,38	2,46
7	8,46	9,93	7,88	2,63
7,5	8,99	9,94	8,39	2,80
8	9,53	9,94	8,89	2,97
8,5	$1,01 \cdot 10^1$	9,95	9,39	3,13
9	1,06	9,96	9,89	3,30
9,5	1,11	9,96	$1,04 \cdot 10^1$	3,47
10	1,17	9,96	1,09	3,64
11	1,27	9,97	1,19	3,97
12	1,38	9,97	1,29	4,30
13	1,49	9,98	1,39	4,64
14	1,59	9,98	1,49	4,97
15	1,70	9,98	1,59	5,31
16	1,81	9,98	1,69	5,64
17	1,91	9,99	1,79	5,97
18	2,02	9,99	1,89	6,31
19	2,13	9,99	1,99	6,64
20	2,23	9,99	2,09	6,98
21	2,34	9,99	2,19	7,31
22	2,44	9,99	2,29	7,64
23	2,55	9,99	2,39	7,98
24	2,66	9,99	2,49	8,31
25	1,76	9,99	2,59	8,64
26	2,87	9,99	2,69	8,98
27	2,98	9,99	2,79	9,31
28	3,08	9,99	2,89	9,65
29	3,19	9,99	2,99	9,98
30	3,30	$1,00 \cdot 10^0$	3,09	$1,03 \cdot 10^2$
31	3,40	1,00	3,19	1,06
32	3,51	1,00	3,29	1,10
33	3,62	1,00	3,39	1,13
34	3,72	1,00	3,49	1,17
35	3,83	1,00	3,59	1,20
36	3,94	1,00	3,69	1,23

$E-E_0, \text{ Гэв}$	γ	β	ср. Гэв	$V_p, \text{ Т.м}$
37	$4,04 \cdot 10^1$	$1,00 \cdot 10^0$	$3,79 \cdot 10^1$	$1,27 \cdot 10^2$
38	4,15	1,00	3,89	1,30
39	4,26	1,00	3,99	1,33
40	4,36	1,00	4,09	1,37
41	4,47	1,00	4,19	2,40
42	4,58	1,00	4,29	1,43
43	4,68	1,00	4,39	1,47
44	4,79	1,00	4,49	1,50
45	4,90	1,00	4,59	1,53
46	5,00	1,00	4,69	1,57
47	5,11	1,00	4,79	1,60
48	5,22	1,00	4,89	1,63
49	5,32	1,00	4,99	1,67
50	5,43	1,00	5,09	1,70
55	5,98	1,00	5,59	1,87
60	6,50	1,00	6,09	2,03
65	7,03	1,00	6,59	2,20
70	7,56	1,00	7,09	2,37
75	8,09	1,00	7,59	2,53
80	8,63	1,00	8,09	2,70
85	9,16	1,00	8,59	2,87
90	9,69	1,00	9,09	3,03
95	$1,02 \cdot 10^2$	1,00	9,59	3,20
100	1,08	1,00	$1,01 \cdot 10^2$	3,37
110	1,18	1,00	1,11	3,70
120	1,29	1,00	1,21	4,03
130	1,40	1,00	1,31	4,37
140	1,50	1,00	1,41	4,70
150	1,61	1,00	1,51	5,03
160	1,72	1,00	1,61	5,37
170	1,82	1,00	1,71	5,70
180	1,93	1,00	1,81	6,04
190	2,04	1,00	1,91	6,37
200	2,14	1,00	2,01	6,70
210	2,25	1,00	2,11	7,04
220	2,35	1,10	2,21	7,37
230	2,46	1,00	2,31	7,70
240	2,47	1,00	2,41	8,04
250	2,67	1,00	2,51	8,37
260	2,78	1,00	2,61	8,70
270	2,89	1,00	2,71	9,04
280	3,99	1,00	2,81	9,37
290	3,10	1,00	2,91	9,70
300	3,21	1,00	3,01	$1,00 \cdot 10^3$
310	3,32	1,00	3,11	1,04
320	3,42	1,00	3,21	1,07
330	3,53	1,00	3,31	1,10
340	3,63	1,00	3,41	1,14
350	3,74	1,00	3,51	1,17
360	3,85	1,00	3,61	1,20
370	3,95	1,00	3,71	1,24
380	4,06	1,00	3,81	1,27
390	4,17	1,00	3,91	1,30

$E-E_0, \text{ Гэв}$	γ	β	ср. Гэв	Вр, Т.м
400	$4,27 \cdot 10^2$	$1,00 \cdot 10^0$	$4,01 \cdot 10^2$	$1,34 \cdot 10^3$
410	4,38	1,00	4,11	1,37
420	4,49	1,00	4,21	1,40
430	4,59	1,00	4,31	1,44
440	4,70	1,00	4,41	1,47
450	4,81	1,00	4,51	1,50
460	4,91	1,00	4,61	1,54
470	5,02	1,00	4,71	1,57
480	5,13	1,00	4,81	1,60
490	5,23	1,00	4,91	1,64
500	5,34	1,00	5,01	1,67
550	5,87	1,00	5,51	1,84
600	6,41	1,00	6,01	2,00
650	6,94	1,00	6,51	2,17
700	7,47	1,00	7,01	2,34
750	8,00	1,00	7,51	2,50
800	8,54	1,00	8,01	2,67
850	9,07	1,00	8,51	2,84
900	9,60	1,00	9,01	3,00
950	$1,01 \cdot 10^3$	1,00	9,51	3,17
1000	1,07	1,00	$1,00 \cdot 10^3$	3,34

Электрон

$E-E_0, \text{ Кэв}$			ср, Кэв	
10	$1,02 \cdot 10^0$	$1,95 \cdot 10^{-1}$	$1,02 \cdot 10^2$	$3,39 \cdot 10^{-4}$
20	1,04	2,72	1,44	4,82
30	1,06	3,28	1,78	5,93
40	1,08	3,74	2,06	6,87
50	1,10	4,13	2,32	7,72
60	1,12	4,46	2,55	8,50
70	1,14	4,76	2,76	9,22
80	1,16	5,02	2,97	9,90
90	1,18	5,26	3,16	$1,06 \cdot 10^{-3}$
100	1,20	5,48	3,35	1,12
110	1,22	5,68	3,53	1,18
120	1,23	5,87	3,70	1,23
130	1,25	6,04	3,87	1,29
140	1,27	6,20	4,03	1,35
150	1,29	6,34	4,19	1,40
160	1,31	6,48	4,35	1,45
170	1,33	6,61	4,50	1,50
180	1,35	6,73	4,65	1,55
190	1,37	6,85	4,80	1,60
200	1,39	6,95	4,94	1,65
210	1,41	7,05	5,09	1,70
220	1,43	7,15	5,23	1,74
230	1,45	7,24	5,37	1,79
240	1,47	7,33	5,50	1,84
250	1,49	7,41	5,64	1,88

Продолжение

$E-E_0, \text{кэв}$	γ	β	ср. кэв	$V_p, \text{Г.м}$
260	1,51	$7,49 \cdot 10^{-1}$	$5,77 \cdot 10^2$	$1,93 \cdot 10^{-3}$
270	1,53	7,56	5,91	1,97
280	1,55	7,63	6,04	2,01
290	1,57	7,70	6,17	2,06
300	1,59	7,77	6,30	2,10
310	1,61	7,83	6,43	2,14
320	1,63	7,89	6,55	2,19
330	1,65	7,94	6,68	2,23
340	1,67	8,00	6,80	2,27
350	1,69	8,05	6,93	2,31
360	1,70	8,10	7,05	2,35
370	1,72	8,15	7,18	2,39
380	1,74	8,19	7,30	2,43
390	1,76	8,24	7,42	2,48
400	1,78	8,28	7,54	2,52
410	1,80	8,32	7,66	2,56
420	1,82	8,36	7,78	2,60
430	1,84	8,40	7,90	2,64
440	1,86	8,43	8,02	2,68
450	1,88	8,47	8,14	2,71
460	1,90	8,50	8,26	2,75
470	1,92	8,54	8,37	2,79
480	1,94	8,57	8,49	2,83
490	1,96	8,60	8,61	2,87
500	1,98	8,63	8,72	2,91
550	2,08	8,76	9,30	3,10
600	2,17	8,88	9,87	3,29
650	2,27	8,98	$1,04 \cdot 10^3$	3,48
700	2,37	9,07	1,10	3,66
750	2,47	9,14	1,15	3,85
800	2,57	9,21	1,21	4,03
850	2,66	9,27	1,26	4,21
900	2,76	9,32	1,32	4,39
950	2,86	9,37	1,37	4,47
1000	2,95	9,41	1,42	4,74
$E-E_0, \text{Мэв}$			ср. Мэв	
1	2,95	$9,41 \cdot 10^{-1}$	$1,42 \cdot 10^0$	$4,74 \cdot 10^{-3}$
1,1	3,15	9,48	1,53	5,10
1,2	3,35	9,54	1,63	5,45
1,3	3,54	9,59	1,74	5,80
1,4	3,74	9,64	1,84	6,14
1,5	3,94	9,67	1,95	6,49
1,6	4,13	9,70	2,05	6,83
1,7	4,33	9,73	2,15	7,18
1,8	4,52	9,75	2,25	7,52
1,9	4,72	9,77	2,36	7,86
2	4,91	9,79	2,46	8,20
2,1	5,11	9,81	2,56	8,54
2,2	5,31	9,82	2,66	8,88
2,3	5,50	9,83	2,76	9,22

<i>E-E₀</i> , Мэв	γ	β	<i>ср</i> , Мэв	<i>Вр</i> , Т·м
2,4	5,70	$9,84 \cdot 10^{-1}$	$2,87 \cdot 10^0$	9,56
2,5	5,89	9,85	2,97	9,90
2,6	6,09	9,86	3,07	$1,02 \cdot 10^{-2}$
2,7	6,28	9,87	3,17	1,06
2,8	6,48	9,88	3,27	1,09
2,9	6,68	9,89	3,37	1,12
3	6,87	9,89	3,47	1,16
3,1	7,07	9,90	3,57	1,19
3,2	7,26	9,90	3,68	1,23
3,3	7,46	9,91	3,78	1,26
3,4	7,65	9,91	3,88	1,29
3,5	7,85	9,92	3,98	1,33
3,6	8,05	9,92	4,08	$1,36 \cdot 10^{-2}$
3,7	8,24	9,93	4,18	1,39
3,8	8,44	9,93	4,28	1,43
3,9	8,63	9,93	4,38	1,46
4	8,83	9,94	4,48	1,50
4,1	9,02	9,94	4,58	1,53
4,2	9,22	9,94	4,68	1,56
4,3	9,42	9,94	4,78	1,60
4,4	9,61	9,95	4,88	1,63
4,5	9,81	9,95	4,98	1,66
4,6	$1,00 \cdot 10^1$	9,95	5,08	1,70
4,7	1,02	9,95	5,19	1,73
4,8	1,04	9,95	5,29	1,76
4,9	1,06	9,96	5,39	1,80
5	1,08	9,96	5,49	1,83
5,5	1,18	9,96	6,00	2,00
6	1,27	9,97	6,49	2,17
6,5	1,37	9,97	6,99	2,33
7	1,47	9,98	7,49	2,50
7,5	1,57	9,98	7,99	2,67
8	1,67	9,98	8,50	2,83
8,5	1,76	9,98	9,00	3,00
9	1,86	9,99	9,50	3,17
9,5	1,96	9,99	$1,00 \cdot 10^1$	3,33
10	2,06	9,99	1,05	3,50
11	2,25	9,99	1,15	3,84
12	2,45	9,99	1,25	4,17
13	2,64	9,99	1,35	4,50
14	2,84	9,99	1,45	4,84
15	3,04	9,99	1,55	5,17
16	3,23	$1,00 \cdot 10^0$	1,65	5,50
17	3,42	1,00	1,75	5,84
18	3,62	1,00	1,85	6,17
19	3,82	1,00	1,95	5,51
20	4,01	1,00	2,05	6,84
21	4,21	1,00	2,15	7,17
22	4,41	1,00	2,25	7,51
23	4,60	1,00	2,35	7,84
24	4,80	1,00	2,45	8,17
25	5,00	1,00	2,55	8,51

Продолжение

$E-E_0, \text{Мэв}$	γ	β	$ср, \text{Мэв}$	$Вр, \text{Т.ж}$
26	$5,19 \cdot 10^1$	1,00	$2,65 \cdot 10^1$	8,84
27	5,38	1,00	2,75	9,18
28	5,58	1,00	2,85	9,51
29	5,78	1,00	2,95	9,84
30	5,97	1,00	3,05	$1,02 \cdot 10^{-1}$
31	6,17	1,00	3,15	1,05
32	6,36	1,00	3,25	1,08
33	6,56	1,00	3,35	1,12
34	6,75	1,00	3,45	1,15
35	6,95	1,00	3,55	1,18
36	7,15	1,00	3,65	1,22
37	7,34	1,00	3,75	1,25
38	7,54	1,00	3,85	$1,28 \cdot 10^{-1}$
39	7,73	1,00	3,95	1,32
40	7,93	1,00	4,05	1,35
41	8,12	1,00	4,15	1,39
42	8,32	1,00	4,25	1,42
43	8,51	1,00	4,35	1,45
44	8,71	1,00	4,45	1,48
45	8,91	1,00	4,55	1,52
46	9,10	1,00	4,65	1,55
47	9,30	1,00	4,75	1,58
48	9,49	1,00	4,85	1,62
49	9,69	1,00	4,95	1,65
50	9,89	1,00	5,05	1,68
55	$1,09 \cdot 10^2$	1,00	5,55	1,85
60	1,18	1,00	6,05	2,02
65	1,28	1,00	6,55	2,18
70	1,38	1,00	7,05	2,35
75	1,48	1,00	7,55	2,52
80	1,58	1,00	8,05	2,69
85	1,67	1,00	8,55	2,85
90	1,77	1,00	9,05	3,02
95	1,87	1,00	9,55	3,19
100	1,97	1,00	$1,00 \cdot 10^2$	3,35
110	2,16	1,00	1,11	3,69
120	2,36	1,00	1,21	4,02
130	2,55	1,00	1,31	4,35
140	2,75	1,00	1,41	4,69
150	2,95	1,00	1,51	5,02
160	3,14	1,00	1,61	5,35
170	3,34	1,00	1,71	5,69
180	3,53	1,00	1,81	6,02
190	3,73	1,00	1,91	6,35
200	3,92	1,00	2,01	6,69
210	4,12	1,00	2,11	7,02
220	4,32	1,00	2,21	7,36
230	4,51	1,00	2,31	7,69
240	4,71	1,00	2,41	8,02
250	4,90	1,00	2,51	8,36
260	5,10	1,00	2,61	8,69
270	5,29	1,00	2,71	9,02

$E-E_0, \text{ Мэв}$	γ	β	ср. Мэв	$V, \text{ Т. м}$
280	$5,49 \cdot 10^2$	1,00	$2,81 \cdot 10^2$	9,36
290	5,69	1,00	2,91	9,69
300	5,88	1,00	3,01	$1,00 \cdot 10^0$
310	6,08	1,00	3,11	1,04
320	6,27	1,00	3,21	1,07
330	6,47	1,00	3,31	1,10
340	6,66	1,00	3,41	1,14
350	6,86	1,00	3,51	1,17
360	7,06	1,00	3,61	1,20
370	7,25	1,00	3,71	1,24
380	7,45	1,00	3,81	1,27
390	7,64	1,00	3,91	1,30
400	7,84	1,00	4,01	1,34
410	8,03	1,00	4,11	1,37
420	8,23	1,00	4,21	1,40
430	8,43	1,00	4,31	1,44
440	8,62	1,00	4,41	1,47
450	8,82	1,00	4,51	1,50
460	9,01	1,00	4,61	1,54
470	9,21	1,00	4,71	1,57
480	9,40	1,00	4,81	1,60
490	9,60	1,00	4,91	1,64
500	9,80	1,00	5,01	1,67
550	$1,08 \cdot 10^3$	1,00	5,51	1,84
600	1,18	1,00	6,01	2,00
650	1,27	1,00	6,51	2,17
700	1,37	1,00	7,01	2,34
750	1,47	1,00	7,51	2,50
800	1,57	1,00	8,01	2,67
850	1,66	1,00	8,51	2,84
900	1,76	1,00	9,01	3,00
950	1,86	1,00	9,51	3,17
1000	1,96	1,00	10,01	3,34
$E-E_0, \text{ Гэв}$			ср. Гэв	
1	$1,96 \cdot 10^3$	1,00	$1,00 \cdot 10^0$	$3,34 \cdot 10^0$
1,1	2,15	1,00	1,10	3,67
1,2	2,35	1,00	1,20	4,00
1,3	2,55	1,00	1,30	4,34
1,4	2,74	1,00	1,40	4,67
1,5	2,94	1,00	1,50	5,01
1,6	3,13	1,00	1,60	5,34
1,7	3,33	1,00	1,70	5,67
1,8	3,52	1,00	1,80	6,00
1,9	3,72	1,00	1,90	6,34
2	3,92	1,00	2,00	6,67
2,1	4,11	1,00	2,10	7,01
2,2	4,31	1,00	2,20	7,34
2,3	4,50	1,00	2,30	7,67
2,4	4,70	1,00	2,40	8,01
2,5	4,90	1,00	2,50	8,34
2,6	5,09	1,00	2,60	8,67
2,7	5,28	1,00	2,70	9,01
2,8	5,48	1,00	2,80	9,34
2,9	5,68	1,00	2,90	9,68

Продолжение

$E-E_0, Гэв$	γ	β	$ср. Гэв$	$Вр, Т·м$
3	$5,87 \cdot 10^3$	1,00	3,00	$1,00 \cdot 10^1$
3,1	6,07	1,00	3,10	1,03
3,2	6,26	1,00	3,20	1,07
3,3	6,46	1,00	3,30	1,10
3,4	6,65	1,00	3,40	1,13
3,5	6,85	1,00	3,50	1,17
3,6	7,05	1,00	3,60	1,20
3,7	7,24	1,00	3,70	1,23
3,8	7,44	1,00	3,80	1,27
3,9	7,63	1,00	3,90	1,30
4	7,83	1,00	4,00	1,33
4,1	8,02	1,00	4,10	1,37
4,2	8,22	1,00	4,20	1,40
4,3	8,42	1,00	4,30	1,43
4,4	8,61	1,00	4,40	1,47
4,5	8,81	1,00	4,50	1,50
4,6	9,00	1,00	4,60	1,53
4,7	9,20	1,00	4,70	1,57
4,8	9,39	1,00	4,80	1,60
4,9	9,59	1,00	4,90	1,63
5	9,79	1,00	5,00	1,67
5,5	$1,08 \cdot 10^4$	1,00	5,50	1,83
6	1,17	1,00	6,00	2,00
6,5	1,27	1,00	6,50	2,17
7	1,37	1,00	7,00	2,34
7,5	1,47	1,00	7,50	2,50
8	1,57	1,00	8,00	2,67
8,5	1,66	1,00	8,50	2,84
9	1,76	1,00	9,00	3,00
9,5	1,86	1,00	9,50	3,17
10	1,96	1,00	10,00	3,34
11	2,15	1,00	$1,10 \cdot 10^1$	3,67
12	2,35	1,00	1,20	4,00
13	2,54	1,00	1,30	4,34
14	2,75	1,00	1,40	4,67
15	2,94	1,00	1,50	5,00
16	3,13	1,00	1,60	5,34
17	3,33	1,00	1,70	5,67
18	3,52	1,00	1,80	6,00
19	3,72	1,00	1,90	6,34
20	3,91	1,00	2,00	6,67
25	4,89	1,00	2,50	8,24
30	5,87	1,00	3,00	$1,00 \cdot 10^2$
35	6,85	1,00	3,50	1,17
40	7,83	1,00	4,00	1,33
45	8,81	1,00	4,50	1,50
50	9,79	1,00	5,00	1,67

Литература

1. Общая литература по ускорителям

- I. Ускорители. Перев с англ. и нем. Под ред. Б. Н. Яблокова, М., Госатомиздат, 1962.
- II. Kollath R. Teilchenbeschleuniger. Berlin. Deutscher Verl. der Wissenschaften, 1957.
- III. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
- IV. Ливингуд Дж. Принципы работы циклических ускорителей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
- V. Livingston M. S., Blewett J. P. Particle accelerators. N. Y., McGraw-Hill Book Company, 1962.

2. Труды Международных конференций по ускорителям заряженных частиц высоких энергий

- VI. Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators. Vol. 1, 1956.
- VII. Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators and Instrumentation, Geneva, 1959.
- VIII. Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators. Brookhaven, 1961.
- IX. Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 21—27 августа 1963 г. Под ред. А. А. Коломенского. М., Атомиздат, 1964.
- X. Proceedings of the V International Conference on High Energy Accelerators. Frascati, 1965. Roma, CNEN, 1966.

3. Работы общего характера

- XI. A b r a g a m A. et al. Etude de la focalisation intence dans le synchrotron à protons. Commissariat à l'Énergie atomique. Note, No. 41 (1954).
- XII. C o l e F. T., Notes on accelerator theory. Report. intern. MURA, 1961.
- XIII. К у р а н т Е., С н а й д е р Х. «Пробл. соврем. физ». «Сб. перев. и обз. ин. период. лит.», № 4, 91 (1958).
- XIV. S y m o n K. R. et al Phys. Rev., 103, 1837. (1956).
- XV. С а й м о н К., С е с с л е р А. В сб. «Накопление релятивистских частиц». Перев. с англ. Под ред. А. Н. Лебедева. М., Госатомиздат, 1963, стр. 48.

4. Литература к главам

Глава 2

- [1] Kerst D. W., Serber R. Phys. Rev., **60**, 53 (1941).
- [2] Курант Е., Снайдер Х. (см. [XIII]).

Глава 8

- [3] Bruck H. Communication verbale, introduisant les principes de l'adaptation du faisceau et de la détermination de l'intensité d'un accélérateur réunion du CERN, printemps (1953).
- [4] Sigurgeirsson Th. Report intern. CERN T/T. s./2. Geneva, 1952.
- [5] Курант Е., Снайдер Х. (см. [XIII]).

Глава 9

- [6] Sigurgeirsson Th. Rapports internes 1 Decembre 1952, Geneve, CERN, 1952; CERN T/T.S decembre, 1952; CERN T/T.S, 3 mai 1953. Geneve, CERN, 1952.
- [7] Symon K. R. et al. (см. (XIV)).

Главы 11 и 12

- [8] Курант Е., Снайдер Х. (см. [XIII]).
- [9] Lüders C. Nuovo Cimento, Suppl., 1075 (1955).
- [10] Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Перев. с франц. Под ред. П. А. Разина. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
- [11] Clousson Y. Commissariat à l'Energie atomique. Section d'Optique corpusculaire. Rapport de stage, septembre, 1960.

Глава 13

- [12] Collins T. L. Rapport intern. CEA 86. Harvard, CEA, 1961.
- [13] Holt I. R., News H. C. Rapport intern. EL8. Liverpool EL 8, 1962.
- [14] Nakach A. Rapport intern. A.R./I.N.T.S.G. 64/7. Geneve, CERN, 1964.

Глава 14

- [15]. Блайхман Н. М., Курант Е. Д. «Пробл. соврем. физ.», «Сб. перев. и обз. ин. период. лит.», № 2, 75 (1952).
- [16] Соигант Е. D. Rev. Scient. Instrum., 24, 836 (1953).

Глава 16

- [17] Бом Д., Фолди Л. В сб. «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц». Перев. с англ. Под ред. Э. Л. Бурштейна, М., Изд-во иностр. лит., 1950.

- [18] Mac Millan E. M. Phys. Rev., **68**, 143 (1945).
 [19] Symon K. R., Sessler A. M. (см. [XV]).
 [20] Твисс Р., Франк Н. В сб. «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц». Перев. с англ. Под ред. Э. Л. Бурштейна. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
 [21] Векслер В. И. «Докл. АН СССР», **43**, 346 (1944); **44**, 393 (1944).

Глава 17

- [22] Blachman N. M., Rev. Scient. Instrum., **21**, 908 (1950).

Глава 19

- [23] Курант Е., Снайдер Х. (см. [XIII]).

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

- [24] Абрагам М., Беккер Р. Теория электричества. Изд. 2. Перев. с англ. Под ред. Т. П. Кравца. Л.—М., ГОНТИ, 1939.
 [25] Sauchois Y., Héno Y. Introduction a l'emploi de rayonnements en chimie-physique. Vol. 1. Paris, 1964.
 [26] Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., Гостехиздат, 1949.
 [27] Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перев. с англ. Под ред. Э. Л. Бурштейна. М., «Мир», 1965.
 [28] Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. Перев. с англ. Под ред. С. П. Капицы. М., Физматгиз, 1963.
 [29] Schott G. A. Electromagnetic radiation. Cambridge, 1912; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.

Глава 20

- [30] Larmor Sir J. Philos. Mag., **44**(5), 503 (1897).
 [31] Liénard A. L'éclairage électrique, **5**, 16 (1898).
 [32] Wiecher t. Arch. néerl., 549 (1900).

Глава 21

- [33] Sands M. Phys. Rev., **97**, 470 (1955).
 [34] Schwinger J. Phys. Rev., **75**, 1912 (1949).
 [35] Westfold K. S. Astrophys. J., **130**, 241 (1959).

Глава 22

- [36] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 2. Перев. с англ. Под ред. К. А. Семендяева. М., «Наука», 1966.
 [37] Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. Перед. с англ. Под ред. Г. Шилова. М., Изд-во иностр. лит., 1949.

Главы 23—25

- [38] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. (см. [VI], стр. 447).
- [39] Pellegrini G. Nuovo Cimento, **22**, 603 (1961).
- [40] Robinson K. W. Phys. Rev., **111**, 373 (1958).
- [41] Mills F. E. Nucl. Instrum. and Method., **23**, 197 (1963).
- [42] Leleux G. Laboratoire de l'accélérateur linéaire d'Orsay. Rapport interne 14. Anneau de stockage, 1964.
- [43] Gratreau P. Laboratoire de l'accélérateur linéaire d'Orsay. LAL 1124. Orsay, 1964.
- [44] Bruck H. Nucl. Instrum. and Method., **29**, 54 (1964).

Глава 26

- [45] Christy R. F. Rapport interne. Pasadena Kellog Rad. Lab., 1955.
- [46] Kramers H. A. Physica, **7**, 284 (1940).

Глава 27

- [47] Lapostolle P. (см. [IX], p. 900); (Ibid., L. Smith [IX], p. 897).
- [48] Laslett L. J. Acc. Summer Study. Brookhaven, BNL, **7534**, 324 (1963).
- [49] Teng L. C. Argonne National Laboratory. ANLAD, 59 (1960).

Глава 28

- [50] Courant E. D. IEEE Trans. Nucl. Sci., **NS-12**, 550 (1965).
- [51] De Packh N. R. I. Quarterly on Nuclear Sciences and Technology. Washington D. C. 1961.
- [52] Fried B. D., Conte S. D. The plasma dispersion function. New York—London, Acad. Press., 1961.
- [53] Hereward H. G. Rapport 65/20. Geneve, CERN, 1965.
- [54] Landau L. J. Phys. URSS, **10**, 25 (1946).
- [55] Laslett L. J. et al. Rev. Scient. Instrum., **36**, 36 (1965).
- [56] Simon A. Riso Report, **18**, 61 (1960).
- [57] Courant E. D., Sessler A. M. SLAC-49. Stanford, 1965, p. 36.
- [58] Robinson K. W. Ibid., p. 32.
- [59] Ferlenghi E. et al. Note Interne 286. Frascati Lab. Nat., 1965.
- [60] Коломенский А. А. (см. [XI]).
- [61] См. [X] доклады по неустойчивости.

Глава 29

- [62] Коломенский А. А. «Атомная энергия», **17**, 57 (1964).
- [63] Nielsen C. E. et al. (см. [VII], p. 239).
- [64] Niel V. K., Sessler A. M. Rev. Scient. Instrum., **36**, 429 (1965).

Глава 30

- [65] Bernardini C. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 407 (1963).
- [66] Haissinski P. Thèse. Laboratoire de l'accélérateur linéaire, Orsay, 1965.

Глава 32

- [67] Bennett W. H. Phys. Rev., **45**, 890 (1934).
- [68] См. [VI], стр. 68.
- [69] Finkelstein D., Sturrock P. A. Rapport intern. P.S./I.N.T. /A. R. 58. 3. Geneve, CERN 1958.

- [70] P h k a w a T. C. E. R. N. 60—35. Geneve, 1960.
[71] P e a s e R. S. Proc. Phys. Soc., 70, part 1, No. 445B, 11 (1957).
[72] L a s l e t t L. J. (см. [IX], p. 104).
[73] Б у д к е р Г. И., Н а у м о в А. А. (см. [VI], стр. 76).
[74] Ф и н к е л ь ш т е й н Д. В кн. «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии». Женева, 1958. Избранные доклады иностранных ученых. Т. 1. М., Атомиздат, 1959, стр. 700.
[75] D r e e s J., P a u l W. (см. [IX], p. 1036).

ОПИСАНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНХРОТРОНОВ

- Cosmotron, Brookhaven. Rev. Sci. Instr., 24, 723—870 (1953).
«Сб. перев. и обз. ин. период. лит.» Пробл. соврем. физ., № 2, (1954):
— Saturne, Saclay. Onde Electrique, 39, 421 (1959).

Оглавление

Предисловие автора к русскому изданию	5
Предисловие редактора перевода	7
Введение	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФОКУСИРУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ

Глава 1. Секторное магнитное поле с постоянным градиентом	21
1.1. Операторы векторного анализа в цилиндрических координатах	21
1.2. Векторный потенциал секторного поля с постоянным градиентом	23
1.3. Аналитическое выражение поля	25
1.4. Свойства секторного поля	27
Глава 2. Уравнение движения частицы в секторном магнитном поле	29
2.1. Некоторые релятивистские соотношения	29
2.2. Уравнения движения в цилиндрической системе координат	31
2.3. Траектория частицы в секторном магнитном поле с постоянным градиентом	33
Глава 3. Гамильтониан частицы	37
3.1. Введение	37
3.2. Обобщенные координаты и импульсы	38
3.3. Сравнение с уравнениями Ньютона — Лоренца	41

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФОКУСИРУЮЩАЯ СТРУКТУРА

Глава 4. Основы матричного исчисления	42
4.1. Элементарные операции	42
4.2. Матрица перехода	44
4.3. Преобразование координат	52
Глава 5. Уравнение Хилла, теорема Флоке	55
Глава 6. Набег фазы, число бетатронных колебаний и диаграммы устойчивости	61
6.1. Определения	61
6.2. Синхротрон со слабой фокусировкой	61
6.3. Фокусировка знакопеременным градиентом и структура FD	63
6.4. Структуры FOD , $FODO$, $FOFDOD$	68

Глава 7. Матрица Твисса	69
Глава 8. Эмитанс, адмитанс и огибающая.	73
8.1. Эмитанс	73
8.2. Понятие согласованного пучка.	74
8.3. Инвариант Куранта—Снайдера.	76
8.4. Последовательные положения частицы в определенной азимутальной плоскости.	76
8.5. Согласование пучка.	77
8.6. Огибающая и форм-фактор F	78
8.7. Выражения для $F_{\text{макс}}$ и F для структуры $FOFDOD$	79
8.8. Выводы.	80
Глава 9. Метод усреднения	80
9.1. Основы метода.	80
9.2. Сводка основных формул.	82
9.3. Применения.	84

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ВОЗМУЩЕННАЯ СТРУКТУРА

Глава 10. Классификация неустойчивостей и резонансов	88
10.1. Ошибки юстировки магнитов или величины поля	88
10.2. Ошибки Δn показателя поля.	90
10.3. Линейная связь.	92
10.4. Нелинейные резонансы.	93
10.5. Нелинейный резонанс связей (Уокиншоу).	95
10.6. Перечень основных резонансов	96
Глава 11. Ошибки установки магнитов и величины поля	96
11.1. Уравнение возмущенного движения.	96
11.2. Замкнутая орбита.	98
11.3. Наибольшее вероятное отклонение замкнутой орбиты	99
11.4. Результаты расчетов для протонного синхротрона ЦЕРН	103
Глава 12. Ошибки показателя спада поля	103
12.1. Метод анализа.	103
12.2. Изменение огибающей.	106
12.3. Изменение числа бетатронных колебаний за один оборот	109
12.4. Запрещенные полосы.	110
Глава 13. Согласованные прямолинейные промежутки	113
Глава 14. Упругое рассеяние пучка протонов на остаточном газе	119
14.1. Случай широкой вакуумной камеры.	119
14.2. Влияние стенок камеры	133

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

УСКОРЕНИЕ

Глава 15. Дисперсионные свойства магнитного поля	137
15.1. Некоторые определения	137
15.2. Коэффициент расширения орбит.	138
Глава 16. Синхротронные колебания при отсутствии возмущений	140
16.1. Синхронная частица	140
16.2. Несинхронная частица.	141
16.3. Линеаризованное уравнение синхротронных колебаний	144
Глава 17. Синхротронные колебания при наличии возмущений	150
17.1. Медленные радиальные колебания синхронной частицы	150
17.2. Быстрые флуктуации параметров.	150

Глава 18. Адиабатическое затухание колебаний	156
18.1. Затухание фазовых колебаний.	156
18.2. Затухание бетатронных колебаний.	157
Глава 19. Критическая энергия.	158

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

ВЛИЯНИЕ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ЭЛЕКТРОНА

Глава 20. Излучаемая мощность	164
20.1. Уравнения электромагнитного поля	164
20.2. Потенциалы Лиенара — Вихерта.	166
20.3. Поле ускоряемого электрона.	167
20.4. Излучаемая мощность.	171
Глава 21. Угловое распределение излучаемой мощности	175
Глава 22. Произведение частоты испускания кванта на средний квадрат его энергии	177
22.1. Спектральное распределение излучения	177
22.2. Величина $N\bar{\epsilon}^2$	182
22.3. Дополнение	185
Глава 23. Радиационное затухание и размеры пучка в приближении сглаженного движения	187
23.1. Излучение и затухание в классическом приближении.	187
23.2. Квантованное излучение и распределение электронов	191
Глава 24. Радиационное затухание и размеры пучка (общая теория)	197
24.1. Классическое затухание амплитуды	197
24.2. Квантованное излучение. Среднеквадратичное значение амплитуды	205
24.3. Заключение	207
Глава 25. Радиальное и азимутальное распределения электронов и позитронов в накопительных кольцах	209
25.1. Предварительные допущения.	209
25.2. Описание движения во вращающейся системе координат	210
25.3. Затухание колебаний	211
25.4. Статистические значения компонент векторов	212
25.5. Произвольная магнитная структура.	213
25.6. Распределение отклонений бетатронных колебаний.	216
25.7. Распределение отклонений синхротронных колебаний	218
Глава 26. Квантовые потери	220
26.1. Уравнение Фоккера — Планка.	220
26.2. Распределение энергии колебаний	222
26.3. Поток вероятности.	223

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

ПУЧКИ БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Глава 27. Ограничение плотности, вызванное поперечным кулоновским расталкиванием	226
Глава 28. Поперечная неустойчивость при взаимодействии пучка со стенкой камеры, обладающей конечной проводимостью	231
28.1. Дисперсионное соотношение.	231
28.2. Расчет поля пучка.	237
28.3. Пучок из последовательности коротких сгустков	240

Глава 29. Продольная неустойчивость	248
29.1. Введение.	248
29.2. Уравнения движения.	248
29.3. Потенциал пространственного заряда.	249
29.4. Теорема Лиувилля.	250
29.5. Уравнение распределения	251
29.6. Интеграл уравнения распределения и устойчивость	252
Глава 30. Потери, вызванные соударениями частиц пучка (эффект Тушека)	255
30.1. Эффективное сечение потерь	255
30.2. Среднее значение $\overline{\sigma}$ (в системе координат S)	257
30.3. Время жизни частиц	259
Глава 31. Увеличение размеров пучка вследствие многократных внутренних соударений	260
Глава 32. Релятивистский стабилизированный пучок Будкер-А	268
32.1. Условия равновесия	268
32.2. Уточнение теории. Устойчивость	279
Приложение	290
Литература	303

Г. Брук

**ЦИКЛИЧЕСКИЕ УСКОРИТЕЛИ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Редактор В. Е. Санков
Художественный
редактор А. С. Александров
Художник В. М. Прокофьев
Технический редактор А. Л. Гулина
Корректор Р. А. Скитева

Сдано в набор 15/XII 1969 г.
Подп. к печ. 22/V 1970 г.
Формат 60×90/16. Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 17,33
Тираж 1600 экз. Цена 1 р. 91 к.
Зак. изд. 68037 Зак. тип. 815

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова 5/7

Московская тип. № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46